Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat09liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 2.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME IX. — ANNÉE 1844.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1844

QA
1
J62
v.9

20765
c.

TABLE DES MATIÈRES.

TOME IX.

Pages

Mémoire sur la poussée que des terres nouvellement remuées exercent contre le parement d'un mur d'appui; par M. *P.-D. Saint-Guilhem*. 1

Mémoire de géométrie; par M. *Auguste Miquel*. 20

Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss; par *J.-A. Serret*. 28

Mémoire sur la théorie des marées; par M. *Ch. Delaunay*. 29

Mémoire sur les ondes successives; par M. *Blanchet*. 73

Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes remarquables; par M. *Ossian Bonnet*. 97

Note sur un théorème de mécanique; par M. *Ossian Bonnet*. 113

Note sur une propriété de la lemniscate; par M. *Ossian Bonnet*. 116

Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales; par M. *J. Bertrand*. 117

Mémoire sur la théorie des surfaces; par M. *J. Bertrand*. 131

Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques; par M. *William Roberts* (*de Dublin*). 155

Note à l'occasion du Mémoire précédent; par M. *J.-A. Serret*. 160

Note sur une formule d'Euler; par M. *E. Catalan*. 161

Note sur l'héliostat; par M. *Cabart*. 175

Note sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré; par M. *Lobatto*. 177

Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques; par M. *de Saint-Venant*. 191

Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices quelconques; par M. *J.-A. Serret*. 193

Solution de quelques problèmes de mécanique; par M. *Ossian Bonnet*. 217

Note sur la théorie de l'attraction; par M. *William Thomson*. 239

Recherches sur la théorie des nombres complexes, par M. *Lejeune-Dirichlet*. — Traduction de M. *Faye*. 245

Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires; par M. *de Saint-Venant*. 270

Note sur les flexions considérables des verges élastiques; par M. *de Saint-Venant*. 275

Mémoire sur les courbes du troisième ordre; par M. *A. Cayley* (*de Cambridge*). . 285

Pages.

Sur une équation différentielle à indices fractionnaires; par M. *Besge*. 294

Sur quelques nouveaux caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, situées entre des limites données; par M. *R. Lobatto*. 295

Addition à la Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires. — Démonstration géométrique et directe des relations binômes; par M. *de Saint-Venant*. 310

Mémoire sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps; par M. *Jacobi*. 313

Note relative à l'élimination; par M. *Finck*. 334

Sur l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Au}{(a+2bx+cx^2)^2}$; par M. *Besge*. 336

Développements sur un théorème de géométrie; par *J. Liouville*. 337

Sur une propriété des sections coniques; par *J. Liouville*. 350

Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques; par M. *Hermite*. . 353

Sur la détermination des orbites planétaires; par M. *Abel Transon*. 369

Note sur la détermination de la surface moyenne d'un rectangle dont les côtés peuvent varier entre des limites données; par M. *Breton (de Champ)*. 373

Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes; par M. *Puiseux*. 377

Note sur la courbure des surfaces; par M. *Finck*. 400

De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque; par *J. Liouville*. 401

Sur les courbes tautochrones; par M. *Puiseux*. 409

Sur les intégrales aux différences finies; par M. *Robert Leslie Ellis (de Cambridge)*. 422

Sur les rayons de courbure des courbes géométriques; par *J. Liouville*. 435

Note sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$; par M. *J.-A. Serret*. 436

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
191,	9,	*au lieu de* S, *lisez* s
329,	15,	*au lieu de* $\sin i$, *lisez* $\sin i_1$.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE
SUR LA POUSSÉE QUE DES TERRES NOUVELLEMENT REMUÉES EXERCENT CONTRE LE PAREMENT D'UN MUR D'APPUI;

PAR M. P.-D. SAINT-GUILHEM,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

§ Ier.

1. On suppose, dans le § Ier de ce Mémoire, que, sans négliger ni le frottement des terres ni leur adhérence lorsqu'elles glissent sur elles-mêmes ou sur le parement du mur d'appui, on attribue au remblai soutenu par le mur un profil polygonal quelconque.

M. Poncelet a publié il y a peu de temps, dans le nº 13 du *Mémorial de l'officier du Génie*, des recherches géométriques très-intéressantes sur ce sujet; mais il a négligé entièrement l'adhérence des terres entre elles et avec le parement du mur. La solution suivante, purement analytique, est très-simple et très-générale, comme on va le voir.

On supposera que le massif des terres et du mur est prismatique et qu'il a une longueur indéfinie; mais on ne considérera de ce massif qu'une longueur égale à l'unité.

Soient AB (*fig.* 1, *Pl. I*) le profil du parement intérieur du mur, B étant le point le plus bas; BC la ligne suivant laquelle la rupture des terres est censée avoir lieu; C le point où cette ligne rencontre le pro-

fil EF d'une des faces du remblai; D un point pris sur le prolongement de EF entre le mur et la ligne de rupture, de telle manière que le triangle BCD soit équivalent à la section du prisme qui s'éboule. Nommons d'ailleurs :

r la perpendiculaire abaissée du point B sur la ligne EF prolongée;

α l'angle que la droite BD, dirigée de B vers D, fait avec une horizontale menée par le point B du côté des terres (cet angle est le même que si le point C coïncidait avec le point E, par conséquent il est connu);

θ, λ, ω les angles que les droites DC, BA, BC font avec la même horizontale;

η la résistance par unité superficielle que deux portions du massif de terre éprouvent en glissant l'un sur l'autre par la seule adhérence des terres entre elles;

P la résultante des forces que font naître, d'une part, la réaction de la face AB contre le prisme de rupture, d'autre part, le frottement et l'adhérence que produirait le prisme de rupture en glissant le long de la face AB;

φ' l'angle aigu que la force P fait avec la normale au parement AB (cet angle est censé connu);

F la résultante de la réaction du plan BC contre le prisme de rupture et du frottement des terres contre ce plan;

φ l'angle aigu que le talus naturel des terres fait avec l'horizon ou l'angle que la force F fait avec la normale au plan BC;

S la force provenant de l'adhérence des terres entre elles sur toute l'étendue BC; cette force $= \frac{\eta r}{\sin(\omega - \theta)}$;

Q le poids du prisme de rupture;

p sa densité.

Cela posé, il est facile de voir qu'au moment où le prisme de rupture est près de glisser sur le plan BC, il y a équilibre entre les forces Q, F, P et S. Donc si l'on projette ces forces sur une droite qui fasse avec l'horizontale menée du côté des terres un angle égal à $\omega - \varphi$, on aura, en observant que ces forces font respectivement avec l'horizontale désignée des angles égaux à 270 degrés, $\omega + 90^\circ - \varphi$, $\lambda - 90^\circ + \varphi'$

et ω; on aura, dis-je, la relation [*]

$$(1)\qquad Q\sin(\omega-\varphi) = P\sin(\lambda+\varphi'+\varphi-\omega) + \frac{\gamma r\cos\varphi}{\sin(\omega-\beta)}.$$

Observons maintenant que le poids Q du prisme de rupture est égal à sa densité multipliée par l'aire du triangle BDC, laquelle est numériquement égale à $\frac{r^2\sin(\alpha-\omega)}{2\sin(\alpha-\beta)\sin(\omega-\beta)}$; cette expression sera généralement positive : nous la supposerons telle.

Remplaçons, dans les formules qui précèdent, $\sin(\alpha-\omega)$, $\sin(\omega-\beta)$, $\sin(\lambda+\varphi'+\varphi-\omega)$ par les expressions respectivement équivalentes

$$\sin(\alpha-\varphi)\cos(\omega-\varphi)-\sin(\omega-\varphi)\cos(\alpha-\varphi),$$
$$\sin(\omega-\varphi)\cos(\varphi-\beta)+\cos(\omega-\varphi)\sin(\varphi-\beta).$$
$$\sin(\lambda+\varphi')\cos(\omega-\varphi)-\cos(\lambda+\varphi')\sin(\omega-\varphi);$$

posons d'ailleurs, pour abréger,

$$\frac{pr^2\cos(\alpha-\varphi)}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\varphi-\beta)\cos(\lambda+\varphi')} = A,\quad \frac{\gamma r\cos\varphi}{\cos(\lambda+\varphi')\cos(\varphi-\beta)} = B,$$
$$\tang(\alpha-\varphi) = a,\quad \tang(\varphi-\beta) = b,\quad \tang(\lambda+\varphi') = c,$$
$$\tang(\omega-\varphi) = x,$$

l'équation (1) se transformera aisément dans la suivante

$$(2)\qquad P = A\frac{(x-a)x}{(x+b)(x-c)} + B\frac{1+x^2}{(x+b)(x-c)};$$

ou bien, en décomposant les fractions composées en fractions simples, et faisant, pour abréger,

$$A(c-a)c + B(1+c^2) = N,$$
$$A(a+b)b + B(1+b^2) = D,$$

on aura

$$(3)\qquad P = A + B + \frac{1}{b+c}\left(\frac{N}{x-c} - \frac{D}{x+b}\right).$$

---

[*] Pour avoir une quelconque de ces projections, il faudra évidemment multiplier la force correspondante par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'horizontale dirigée vers les terres, diminué de $\omega-\varphi$.

La ligne suivant laquelle nous avons supposé que les terres tendaient à se rompre est une ligne tout à fait arbitraire; pour avoir la ligne de rupture naturelle, il faut, conformément au principe de Coulomb, chercher la valeur de x qui rend P un maximum. Cette valeur satisfait à l'équation $\frac{dP}{dx} = 0$; or, cette condition donne immédiatement

$$\frac{x-c}{x+b} = \pm\sqrt{\frac{N}{D}} = R, \tag{4}$$

ou bien

$$x = \frac{c+bR}{1+R}. \tag{5}$$

La valeur de P correspondante à cette double valeur de x sera donnée, comme il est facile de s'en assurer [*], par la formule

$$P = A + B - \frac{D}{(x+b)^2}. \tag{6}$$

Parmi les deux valeurs de x que nous avons trouvées, il y en a nécessairement une qui correspond au maximum de la poussée : pour la distinguer de l'autre, il faut, d'après les principes du calcul différentiel, déterminer celle qui, substituée dans l'expression de $\frac{d^2P}{dx^2}$, donne un résultat négatif; or, en différentiant deux fois l'équation (3), on a

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{2D}{(x+b)^2(x+c)^2}\cdot\frac{x-c}{x+b}.$$

Nous avons trouvé précédemment que pour les valeurs de x dont il s'agit, le rapport $\frac{x-c}{x+b}$ a deux valeurs égales et de signes contraires : si l'on prend celle pour laquelle le rapport $\frac{x-c}{x+b}$ a un signe contraire à celui de D, la valeur de $\frac{d^2P}{dx^2}$ correspondante sera évidemment négative ; P sera un maximum. Dans le cas contraire, $\frac{d^2P}{dx^2}$ sera positif, P sera un

[*] On y parviendra aisément en substituant pour $x-c$ et $x+b$ leurs valeurs dans l'équation (3).

minimum; en d'autres termes, suivant qu'on prendra D.R négatif ou positif, on aura pour P une valeur maximum ou minimum. La première de ces valeurs correspond à la poussée naturelle; la seconde est étrangère à la question [*]; mais si l'on y change φ en $-\varphi$, φ' en $-\varphi'$, elle représente une poussée particulière qui a une grande importance dans certaines applications: M. Poncelet l'a appelée, pour la distinguer de l'autre, la *butée* des terres; elle correspond évidemment au cas où le prisme de rupture, au lieu de descendre, tendrait à remonter le long du plan de rupture.

Toutefois, pour que ces valeurs de x soient admissibles, il faut qu'elles correspondent à des plans de rupture qui rencontrent, comme on l'a supposé, la face du remblai EF entre les points E et F. S'il n'en était pas ainsi, on devrait recommencer le calcul par rapport à une autre face.

2. Lorsqu'on néglige la force qui provient de la cohésion des terres entre elles, auquel cas $B=0$, l'expression de la poussée peut se mettre sous une forme plus commode pour le calcul que l'expression (6). En effet, si l'on différentie directement l'expression (2), en regardant la quantité $\frac{x(x-a)}{(x+b)(x-c)}$ comme le produit de deux facteurs, dont l'un serait $\frac{x-a}{x+b}$, l'autre $\frac{x}{x-c}$, on trouve immédiatement

$$\frac{A(a+b)}{(x+b)^2}\cdot\frac{x}{(x-c)^2}-\frac{Ac}{x-c}\cdot\frac{x-a}{x-b}=0,$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{Ax(x-a)}{(x-c)(x+b)}=\frac{A(a+b)}{c}\cdot\left(\frac{x}{x+b}\right)^2=P,$$

ou, en vertu de l'équation (4),

$$P=\frac{A(a+b)c}{(b+c)}\left(1+\frac{b}{c}R\right)^2.$$

---

[*] Observons cependant que si ω était négatif, ce qui peut avoir lieu dans certains cas, la valeur de P dont il s'agit donnerait, en y supposant $\varphi'=0$, la plus petite poussée qui, appliquée extérieurement au parement du mur, suffirait pour rompre le massif des terres.

Pour distinguer la valeur maximum de la valeur minimum, on remarquera que l'on a $DR = A(a+b)c.\frac{b}{c}R$; que $A(a+b)c$ est essentiellement positif, sans quoi la poussée serait négative, ce qui est inadmissible : de là il résulte que P sera un maximum si l'on prend pour R la valeur qui rend $\frac{b}{c}.R$ une quantité négative ; que P sera un minimum dans le cas contraire : en d'autres termes, si l'on appelle K la valeur numérique de $\frac{b}{c}R$, on aura

$$P = \frac{A(a+b)c}{(b+c)^2}(1 \pm K)^2,$$

le signe inférieur de K étant relatif au maximum, le signe supérieur au minimum.

Si l'on remplace A, R, a, b, c par leurs valeurs exprimées au moyen de λ, φ, φ', α, β, p, r, on aura

$$(7) \qquad K = \sqrt{\frac{\sin(\lambda+\varphi+\varphi'-\alpha)\sin(\varphi-\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\lambda+\varphi')}}.$$

$$(8) \qquad P = \frac{1}{2}pr^2\,\frac{\sin(\lambda+\varphi')}{\sin^2(\lambda+\varphi+\varphi'-\beta)}(1 \pm K)^2,$$

la valeur de x, correspondante à cette valeur de P, étant donnée par la formule

$$(9) \qquad x = \frac{(1 \pm K)\tang(\lambda+\varphi')}{1 \pm \frac{\tang(\lambda+\varphi')}{\tang(\varphi+\beta)}K} \; [*].$$

Il ne faudra pas oublier que dans ces formules les signes supérieurs et inférieurs des termes affectés de double signe se correspondent, et que pour avoir la butée, on doit, dans l'expression du minimum de P, changer φ en $-\varphi$, et φ' en $-\varphi'$.

---

[*] Si $\lambda + \varphi' = 90°$, on aura simplement

$$K = \sqrt{\frac{\cos(\varphi-\alpha)\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}}, \qquad x = \pm\frac{(1 \pm K)\tang(\varphi-\beta)}{K}.$$

3. La formule (8) donne lieu à une construction graphique très-remarquable et très-simple : menons par le point B une droite BO qui fasse avec l'horizontale menée du côté des terres un angle égal à $\lambda + \varphi + \varphi'$ et qui rencontre EF prolongé en O; menons par le point D une droite DG qui fasse avec la même horizontale un angle égal à φ et qui rencontre BO en G, on trouvera aisément, à l'aide des principes de la trigonométrie,

$$\frac{BO}{OD} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\lambda + \varphi' - \alpha)}, \quad \frac{OG}{OD} = \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\lambda + \varphi')};$$

par conséquent

$$\frac{OG}{OB} = K^2.$$

Si l'on prend d'ailleurs sur la ligne OB un point X, tel que $\overline{OX}^2 = OG.OB$, et si l'on fait attention que $OB = \frac{r}{\sin(\lambda + \varphi + \varphi' - \beta)}$, on verra que l'on a simplement

$$P = \tfrac{1}{2} p \sin(\lambda + \varphi')\overline{BX}^2,$$

en ne prenant que la valeur de P qui correspond au maximum de la poussée.

Il est très-facile d'obtenir, par une construction analogue, ce que devient la valeur minimum de P lorsqu'on y change φ en $-\varphi$ et φ' en $-\varphi'$: nous ne nous y arrêterons pas. Ces constructions sont précisément celles auxquelles M. Poncelet est parvenu directement (pour le cas particulier dont il s'agit) par des considérations purement géométriques, dans son beau Mémoire sur la stabilité des revêtements.

4. La détermination du point d'application de la poussée sur le parement AB du mur ne présente pas de difficulté. Désignons par N la réaction du parement AB contre le prisme de rupture (ou la force P estimée suivant la normale à AB); par N_z [*] la valeur de N correspondante à une longueur z du parement, comptée à partir du point le plus élevé A; par l la longueur totale AB du parement; par L le moment

[*] Si l'on désigne par γ' la résistance, par unité superficielle, que les terres éprouvent en glissant sur le parement AB en vertu seulement de leur adhérence au parement,

de la poussée exercée sur le parement AB par rapport au point A, on aura la formule

$$L = \int z\,dN_z, \tag{10}$$

l'intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = l$.

Si cette intégrale ne peut être obtenue exactement par des calculs simples, on se bornera à calculer approximativement la somme des éléments $z\,dN_z$, en faisant varier z par degrés insensibles. Connaissant L, en le divisant par la valeur de N correspondante à la longueur totale AB du parement, on aura la distance du point A au point d'application de la poussée sur le parement.

La formule (10) s'applique à toutes les hypothèses; mais si l'on suppose $B = 0$, comme dans les formules (7), (8) et (9), on simplifiera généralement la formule (10), en observant qu'une première intégration par parties donne $L = Pl - \int_0^l N_z\,dz$.

Si l'on pose maintenant $N_z = z^2 T$, et qu'on intègre de nouveau par parties, en considérant $z^2 dz$ comme la différentielle d'une partie, on aura

$$L = \tfrac{2}{3} Pl + \tfrac{1}{3} \int z^3 dT. \tag{11}$$

Il ne restera plus qu'à trouver l'intégrale de $z^3 dT$ depuis $z = 0$ jusqu'à $z = l$: on l'obtiendra facilement par approximation, si l'on ne peut pas l'avoir exactement.

---

et par f' le coefficient du frottement dans ce glissement, on aura généralement

$$N_z = P \cos \varphi',$$

φ' étant donné par la formule

$$f' P \cos \varphi' + \gamma' z = P \sin \varphi',$$

ou par la suivante

$$P^2 (1 + f'^2) \cos^2 \varphi' + 2 P f' \gamma' z \cos \varphi' = P^2 - \gamma'^2 z^2;$$

si γ' est sensiblement nul, on aura simplement

$$\operatorname{tang} \varphi' = f',$$

ce qui devait être.

§ II.

APPLICATIONS A DES CAS PARTICULIERS.

Cas d'une terrasse dont le plan supérieur monte à partir de l'arête du couronnement du mur, en faisant avec l'horizon un angle moindre que celui du talus naturel des terres.

5. On supposera, pour plus de simplicité, dans les diverses applications qui vont suivre, qu'on néglige l'adhérence des terres entre elles, leur adhérence au parement du mur et leur frottement sur ce parement. Alors, pour trouver la poussée, on n'a qu'à faire, dans les formules (7), (8) et (11), savoir :

$$\varphi' = 0, \quad \alpha = \lambda;$$

ce qui donne

$$K = \sqrt{\frac{\sin\varphi \sin(\varphi - \theta)}{\sin(\lambda - \theta)\sin\lambda}}, \tag{12}$$

$$P = \tfrac{1}{2} p r^2 \frac{\sin\lambda}{\sin^2(\lambda - \theta + \varphi)}(1 - K)^2, \tag{13}$$

$$L = \tfrac{2}{3} P l. \tag{14}$$

6. Si l'on suppose que l'on ait $\theta = 0$, c'est-à-dire que la terrasse soit horizontale, on aura

$$K = \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda},$$

et, par suite, si l'on observe que

$$r = l \sin\lambda,$$

que

$$\sin\lambda - \sin\varphi = 2\sin\frac{\lambda - \varphi}{2}\cos\frac{\lambda + \varphi}{2},$$

que

$$\sin(\lambda + \varphi) = 2\sin\frac{\lambda + \varphi}{2}\cos\frac{\lambda + \varphi}{2},$$

et si l'on pose d'ailleurs

$$\frac{\lambda - \varphi}{2} = \varphi_1,$$

on aura simplement

$$(15)\qquad P = \tfrac{1}{2} p l^2 \sin\lambda \left[\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\lambda - \varphi_1)}\right]^2,$$

$$(16)\qquad L = \tfrac{2}{3} P l.$$

La ligne de rupture a, dans le cas particulier dont il s'agit, une direction remarquable : on déduit en effet de l'équation (9),

$$(17)\qquad x = \frac{(1 - K)\tang\lambda}{1 + \frac{\tang\lambda}{\tang\varphi} K};$$

et, en observant que

$$\sin\lambda - \sin\varphi = 2\sin\frac{\lambda - \varphi}{2}\cos\frac{\lambda + \varphi}{2},$$

et que

$$\cos\lambda + \cos\varphi = 2\cos\frac{\lambda + \varphi}{2}\cos\frac{\lambda - \varphi}{2},$$

on aura simplement

$$(18)\qquad x = \tang\frac{\lambda - \varphi}{2} = \tang\varphi_1.$$

Si l'on désigne par P′ et x' ce que deviennent P et x dans l'hypothese de la butée des terres [on obtiendra ces quantités en changeant K en $-K$ et φ en $-\varphi$ dans les formules (13) et (17)], on aura

$$(19)\qquad P' = \tfrac{1}{2} p l^2 \sin\lambda \left[\frac{\sin(\lambda - \varphi_1)}{\sin\varphi_1}\right]^2,$$

$$(20)\qquad x' = \tang\frac{\lambda + \varphi}{2} = \tang(\lambda - \varphi_1).$$

Si l'on fait attention que $x' = \tang(\omega + \varphi)$, on déduira de là

$$\omega = \frac{\lambda - \varphi}{2} = \varphi_1.$$

Il résulte des formules (18) et (20), 1° que, dans le cas de la poussée, la ligne de rupture divise en deux parties égales, comme on le sait depuis longtemps, l'angle que le parement du mur fait avec le talus que prendraient naturellement les terres si l'on reculait le mur; 2° que,

dans le cas de la butée, la ligne de rupture fait, avec l'horizontale dirigée vers les terres, un angle égal à la moitié de celui dont il vient d'être question; en sorte que, si le parement était poussé d'un côté et buté de l'autre par des terres de même nature, les deux lignes de rupture seraient à angle droit l'une sur l'autre.

Cas d'une terrasse en parapet dont le plan supérieur forme avec l'horizon un talus plus doux que le talus naturel des terres.

7. On suppose que le pied du talus du parapet ACD coïncide avec l'arête intérieure A (*fig.* 2) du couronnement du mur; que le talus AC forme, avec l'horizontale dirigée vers les terres, un angle β_0; que le plan supérieur CD de la terrasse fait avec la même horizontale un angle β_1; enfin, que la partie Aa du parement prolongé comprise entre le point A et le plan CD prolongé, est égale à h. On conserve d'ailleurs pour λ, φ et α les conventions faites précédemment. Cela posé, distinguons deux cas : β_0 est $>$ ou $<$ φ.

Soit $\beta_0 > \varphi$, z étant une portion quelconque Ab du parement, et α_z la valeur de α correspondante. Il est visible que pour avoir α_z il faudra mener Ak parallèle à bC et joindre bk. L'angle que bk fera avec l'horizontale dirigée vers les terres sera la valeur de α_z. D'après cela, on trouvera facilement [*], au moyen des principes de la trigonométrie,

---

[*] Le triangle AaC donne

$$aC = \frac{h \sin(\lambda - \beta_0)}{\sin(\beta_0 - \beta_1)};$$

les deux triangles aAk, abC, comparés entre eux, donnent

$$ak = \frac{h}{z + h} \cdot aC;$$

le triangle bak donne

$$\operatorname{tang}(b + \tfrac{1}{2}a) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \cdot \frac{ab + ak}{ab - ak}.$$

Si l'on observe d'ailleurs que $a = 180^\circ - \lambda + \beta_1$, et que $b = \lambda - \alpha_z$, on aura immédiatement la formule du texte.

que α_z est donné par la formule

$$\cot\left(\alpha_z - \frac{\lambda + \theta_1}{2}\right) = \frac{(z+h)^2 \sin(\theta_0 - \theta_1) + h^2 \sin(\lambda - \theta_0)}{(z+h)^2 \sin(\theta_0 - \theta_1) - h^2 \sin(\lambda - \theta_0)} \cot\left(\frac{\lambda - \theta_1}{2}\right).$$

ou, en posant pour abréger

$$(21) \qquad \left(\frac{h}{z+h}\right)^2 \frac{\sin(\lambda - \theta_0)}{\sin(\theta_0 - \theta_1)} = \operatorname{tang} k_z,$$

par la formule suivante,

$$(22) \qquad \cot\left(\alpha_z - \frac{\lambda + \theta_1}{2}\right) = \operatorname{tang}(45^\circ + k_z) \cot\left(\frac{\lambda - \theta_1}{2}\right).$$

Connaissant α_z, on aura la valeur de P correspondante à une valeur quelconque de z, au moyen des formules suivantes, déduites des formules (7) et (8) :

$$(23) \qquad K = \sqrt{\frac{\sin(\lambda + \varphi - \alpha_z)\sin(\varphi - \theta_1)}{\sin(\alpha_z - \theta_1)\sin\lambda}},$$

$$(24) \qquad P = \tfrac{1}{2} p z^2 \sin\lambda \left[\frac{(1 - K)\sin(\lambda - \theta_1)}{\sin(\lambda + \varphi - \theta_1)}\right]^2.$$

Si l'on combine la formule (11), dans laquelle

$$T = \tfrac{1}{2} p \sin\lambda \left[\frac{(1 - K)\sin(\lambda - \theta_1)}{\sin(\lambda + \varphi - \theta_1)}\right],$$

avec les formules (20), (22), (23) et (24), on aura la valeur de L.

8. Soit $\theta_0 < \varphi$; il pourra arriver que la ligne de rupture correspondante à l'extrémité inférieure du parement ne rencontre pas le plan supérieur ou bien le rencontre quelque part. Dans le premier cas, on tombe dans la première application que nous avons faite (5); dans le deuxième cas, on cherchera la ligne de rupture qui aboutit à l'arête C, *fig.* 3, du plan supérieur. On la trouvera en observant qu'en vertu des formules (7) et (9) on a

$$(25) \qquad K = \sqrt{\frac{\sin\varphi \sin(\varphi - \theta_0)}{\sin(\lambda - \theta)\sin\lambda}},$$

$$(26) \qquad \operatorname{tang}(\omega - \varphi) = \frac{(1 - K)\operatorname{tang}\lambda}{1 + K\dfrac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang}(\varphi - \theta_0)}}.$$

Connaissant $\omega - \varphi$, et par conséquent $\lambda - \omega$, on connaîtra, dans le triangle AbC, le côté AC et les angles A et b; par conséquent Ab sera donné par les formules

$$Ab = \frac{\sin(\omega - \theta_0)}{\sin(\lambda - \omega)} AC, \quad AC = \frac{h \sin(\lambda - \theta_1)}{\sin(\theta_0 - \theta_1)}.$$

Cela fait, on calculera la poussée sur Ab et son moment au moyen des formules du n° 5. La poussée sur Bb et son moment s'obtiendront au moyen des formules du numéro précédent. Seulement on fera attention que dans la formule (11) l'intégrale doit être prise à partir de $z = Ab$ et non à partir de $z = 0$.

PROBLÈME.

9. « Une caisse dont le profil est un rectangle à base horizontale » et dont la longueur est indéfinie, est remplie de terre jusqu'au ni- » veau des bords; on demande la pression sur les côtés et sur le fond » de la caisse. »

Soit ABCD, *fig.* 4, la section transversale de la caisse dont il s'agit. Occupons-nous d'abord de la pression sur les faces AB et DC: il est évident que si, à côté de la caisse ABCD, on place sur le plan horizontal, et touchant l'autre, une nouvelle caisse DCEF parfaitement égale à la première et remplie d'une terre semblable, la cloison commune DC éprouvera des deux côtés la même pression, ou, ce qui revient au même, l'action des terres de la caisse DCEF sur les terres de l'autre caisse remplacera identiquement l'action de la cloison sur celles-ci. De même, on pourra remplacer l'action de la cloison FE sur les terres de la seconde caisse par l'action des terres d'une troisième caisse semblable aux deux premières, et ainsi de suite. Donc l'action des terres de la caisse ABCD sur la face AB sera la même que si la largeur de la caisse était indéfinie dans le sens AD. La pression sur DC s'obtiendra de la même manière.

Passons maintenant à la pression exercée sur le fond de la caisse. Appelons h la hauteur de la caisse; e sa largeur; φ_1 l'angle que la ligne de rupture correspondante au point B fait avec AB; p la densité des terres; γ' le coefficient de frottement des terres sur les faces de la caisse; γ'' le coefficient de l'adhérence des terres sur les mêmes faces. Il est évident que si l'on suppose γ' et γ'' nuls, la pression P_1 sur le

fond sera égale à phe; mais le frottement sur AB ou DC étant égal à $\frac{1}{2}ph^2 \operatorname{tang} \varphi_1 . \gamma'$, et l'adhérence sur l'une ou l'autre de ces faces étant égale à $h\gamma''$, on aura réellement

$$P_1 = h(pe - 2\gamma'' - ph \operatorname{tang} \varphi_1 \gamma' .$$

Si le massif des terres, au lieu d'être contenu entre deux cloisons, était indéfini dans le sens de la largeur, il faudrait remplacer γ' par le coefficient γ du frottement des terres sur elles-mêmes. On aura ainsi la formule qui servirait à évaluer la pression que supporte, par exemple, un pont chargé d'une hauteur h de terre; dans ce cas, d'après M. Navier, γ varie, suivant la nature des terres, depuis 0,6 jusqu'à 1,40; γ'' varie depuis 136 kilogrammes jusqu'à 568 kilogrammes.

§ III.

Méthode à l'aide de laquelle on peut déterminer la poussée contre un mur dont le parement a un profil polygonal quelconque.

10. Nous admettrons ici que les terres n'ont aucune tendance à glisser sur les faces du parement, ou, ce qui revient au même, que tout mouvement des terres est empêché par des forces perpendiculaires aux faces du parement appliquées en certains points de ces faces. Dans cette hypothèse, considérant d'abord un parement à deux faces ABB_1, *fig.* 5, soutenant un remblai de terre B_1BAEF, la face AB donnera lieu à une réaction dont on déterminera facilement la grandeur et le point d'application sur AB au moyen des formules des nos 4 et 7, en faisant dans celles-ci $\varphi' = 0$. On trouvera aussi, au moyen des mêmes formules, la ligne de rupture correspondante au point B. Soit P_0 la réaction de AB, b son point d'application sur la même face, BD la ligne de rupture, Q_0 le poids du prisme ABDE dirigé suivant la verticale qui passe par le centre de gravité de ce prisme. Il est visible que l'action du prisme BAED sur le plan BD est la résultante des forces P_0 et Q_0, et qu'on pourra remplacer l'action du prisme BAED par la résultante dont il s'agit appliquée au point où elle rencontre le plan solide BD, ou, ce qui revient au même, par les composantes appliquées aux points où elles rencontrent le même plan. Alors, pour trouver l'action des terres, relativement à une ligne de rupture B_1D_1, sur la face BB_1 il suffira

évidemment de chercher la résultante de la force P_0 et du poids Q_1 du prisme B_1BAEF; de décomposer ensuite cette résultante en trois, l'une perpendiculaire à BB_1, l'autre perpendiculaire à B_1D_1, la troisième parallèle à B_1D_1 (dirigée de B_1 vers D_1) et égale à la résistance que fait naître le massif en glissant le long de D_1B_1; il est clair alors que la composante perpendiculaire à BB_1 sera égale et contraire à la réaction de BB_1 contre le massif, d'où l'on voit que si la ligne de rupture B_1D_1 était connue, la réaction de BB_1 serait également connue; or, cette ligne B_1D_1 se détermine sans difficulté à l'aide des principes dont on a fait usage dans le n° 1.

Si le parement avait trois faces, il est facile de voir que les mêmes considérations conduiraient à la détermination de la réaction de la troisième; il est facile de voir encore qu'en continuant les mêmes considérations, on déterminerait la réaction d'une face quelconque d'un parement qui aurait autant de faces qu'on voudrait.

Supposons que l'on désigne par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les angles que les première, deuxième, troisième, ..., $(m+1)^{ième}$ faces font avec une horizontale menée du côté des terres; par $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m$ les réactions de ces mêmes faces contre le massif des terres; conservons aux lettres $\alpha, \beta, \omega, \varphi, \gamma, r$ et Q les mêmes significations qu'au n° 1. En raisonnant comme on a fait à ce numéro, on trouvera, au lieu de l'équation (1), la suivante,

$$Q\sin(\omega-\varphi) = P_m\sin(\lambda_m+\varphi-\omega) + \sum P_n\sin(\lambda_n+\varphi-\omega) + \frac{\gamma.\cos\varphi}{\sin(\omega-\beta)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de n depuis $n = 0$ jusqu'à $n = m - 1$.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{pr^2\cos(\alpha-\varphi)}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\varphi-\beta)\cos\lambda_m} = A, & \dfrac{\gamma r\cos\varphi}{\cos(\varphi-\beta)\cos\lambda_m} = B, \\ \sum P_n\dfrac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m}(\operatorname{tang}\lambda_n - \operatorname{tang}\lambda_m) = C, & \operatorname{tang}(\alpha-\varphi) = a, \\ \operatorname{tang}(\varphi-\beta) = b, \quad \operatorname{tang}\lambda_n = c_n, & \operatorname{tang}(\omega-\varphi) = x; \end{array}\right.$$

l'équation précédente se transformera aisément en celle qui suit :

$$P_m = A\frac{(x-a)x}{(x+b)(x-c_m)} + B\frac{1+x^2}{(x+b)(x-c_m)} + \frac{C}{x-c_m} - \sum P_n\frac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m},$$

qui, en décomposant les fractions composées en fractions simples, et en posant, pour abréger,

$$(28)\quad \begin{cases} A(c_m - a)c_m + B(1 + c_m^2) + C(b + c_m) = N, \\ A(a + b)b + B(1 + c_m^2) = D, \end{cases}$$

devient elle-même

$$P_m = A + B - \sum P_n \frac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m} + \frac{1}{b + c_m}\left(\frac{N}{x - c_m} - \frac{D}{x + b}\right).$$

Traitant cette équation comme l'équation (3) du n° **1**, et posant, pour abréger, $\sqrt{\frac{N}{D}} = R$, on aura, pour résoudre la question dont il s'agit, les deux formules suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} P_m = A + B - \sum P_n \frac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m} - \frac{D}{(x + b)^2}, \\ x = \frac{c_m \pm bR}{1 \pm R}; \end{cases}$$

en ayant soin de prendre dans la derniere, au lieu du double signe, le signe inférieur ou le signe supérieur, suivant que D est positif ou négatif. On aurait la butée des terres en prenant le signe contraire et en changeant φ en $-\varphi$.

La détermination du moment de la poussée sur une face, par rapport à l'extrémité supérieure de cette face, ne saurait présenter aucune difficulté. En effet, si l'on désigne par l_0, l_1, l_2,... les longueurs des première, deuxieme, troisième faces, par $P_{(m,z)}$ la réaction de la $(m+1)^{\text{ième}}$ face sur une longueur z, par L_m le moment de la poussée P_m, par rapport à l'extrémité supérieure de la face l_m, on aura

$$(30)\quad L_m = P_m l_m - \int_0^{l_m} P_{(m,z)}\, dz,$$

$P_{(m,z)}$ étant donné par les formules (27), (28) et (29), dans lesquelles on prendra pour r les valeurs correspondantes aux valeurs successives de z. Il est bien entendu que cette solution n'est exacte qu'en ayant égard aux restrictions que nous avons faites à la fin du n° **1**.

Modification qu'il paraîtrait convenable d'apporter au principe de Coulomb.

11. Tous les auteurs qui ont écrit sur la poussée des terres après Coulomb admettent que le plan de rupture est déterminé, quelle que soit l'inclinaison du parement du mur sur l'horizon, par la condition que si l'on décompose le poids du prisme détaché en trois forces, l'une normale au parement du mur, l'autre normale au plan de rupture, la troisième parallèle au plan de rupture et égale à la résistance que ce plan oppose au glissement du prisme détaché, la première soit un maximum par rapport à la direction du plan de rupture. Ce principe manque, à notre avis, d'exactitude, ou du moins n'a pas la généralité qu'on lui suppose; nous allons essayer de le prouver par un exemple frappant :

Supposons qu'un parement en maçonnerie AB, *fig.* 6, à peu près horizontal, comme serait le couronnement d'un mur ABA'B', soit surmonté d'un parapet en terre BAEF; si l'on veut savoir la pression qu'éprouve le parement AB, il est naturel d'appliquer à cette question le principe de Coulomb, comme nous l'avons fait précédemment. Or, en négligeant la cohésion des terres, on trouve que le plan de rupture BD est à peu près parallèle au talus naturel des terres; que la poussée sur AB est à peu près égale au poids du prisme détaché, et que l'action de ce dernier prisme sur BD est à peu près nulle. Ces résultats sont inadmissibles, car si l'action du prisme détaché sur BD était sensiblement nulle, il s'ensuivrait que ce prisme pourrait à très-peu près se soutenir tout seul, ce qui est absurde. Si cette action n'est pas nulle, la réaction de AB n'est pas non plus égale au poids du prisme détaché [*]; donc le principe de Coulomb est inexact dans ce cas.

Nos réflexions nous ont amené à modifier le principe dont il s'agit de la manière suivante : Admettons que sans changer de forme ni de densité, le prisme détaché se solidifie et tende à glisser le long du plan de

[*] Ceci explique pourquoi les géomètres qui se sont occupés de l'action des terres sur les demi-revêtements ont toujours supposé que le massif des terres se divisait suivant le prolongement du parement intérieur du mur, ce qui est peu rationnel.

rupture; il pourra toujours être tenu en équilibre par une force parallèle à ce plan: or, nous supposerons que le parement du mur qui soutient les terres produit exactement le même effet que la force dont nous venons de parler. Il est bien vrai que le parement de mur fera naître une réaction perpendiculaire à ce mur; mais nous admettrons que lorsque la force qui est égale et opposée à celle qui maintient le prisme solidifié en équilibre n'est pas perpendiculaire au parement du mur, elle se décompose en deux autres, l'une perpendiculaire au parement du mur et détruite par la résistance normale de ce parement, l'autre parallèle au parement et détruite par la résistance qu'il oppose au glissement.

Cela posé, on doit regarder comme évident, conformément au principe de Coulomb, que le prisme qui tendra à se détacher sera celui pour lequel la force qui le maintient en équilibre sur le plan de rupture sera un maximum.

Appliquons ce principe à la détermination du plan de rupture et de la poussée supposée parallèle au plan de rupture.

Conservons les notations du n° 1, en appelant toutefois G la nouvelle poussée, nous aurons, au lieu de l'équation (1), la suivante

$$Q \sin(\omega - \varphi) = G \cos\varphi + \frac{\gamma r \cos\varphi}{\sin(\omega - \theta)},$$

ou en mettant pour Q sa valeur et transposant,

$$G = \frac{1}{2} p \frac{r^2}{\cos\varphi \sin(\alpha - \theta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \omega) \sin(\omega - \varphi)}{\sin(\omega - \theta)} - \frac{\gamma r}{\sin(\omega - \theta)};$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\frac{1}{2} p r^2 \cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi \sin(\alpha - \theta) \cos(\varphi - \theta)} = A', \qquad \frac{\gamma r}{\cos(\varphi - \theta)} = B',$$

cette équation deviendra

$$G = A' \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{a - x}{x + b} - B' \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x + b},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \{x^3[A'(a + b) + B'b] + x^2(A' - B') + bx(2A' + B') - A'ab - B'\};$$

par conséquent on aura la direction du plan de rupture en posant

$$x^3[A'(a + b) + B'b] + x^2(A' - B') + bx(2A + B') - A'ab - B' = 0.$$

et en cherchant la valeur de x qui satisfait à cette équation, et qui est comprise entre $x = 0$ et $x = \tang(\lambda - \varphi)$, puisque ω est nécessairement $> \varphi$ et $< \lambda$ [*].

Cette solution approcherait plus, à notre avis, de la vérité, du moins dans certains cas, que celle de Coulomb.

Mais si l'on fait attention que le principe de Coulomb fournit dans tous les cas une solution facile; qu'elle donne pour l'action normale du prisme sur le parement du mur une valeur plus grande que l'autre; que la recherche de cette action a pour but ordinairement de déterminer l'épaisseur à donner au mur destiné à la vaincre; qu'il ne peut en résulter pour ce mur qu'une épaisseur exagérée, ce qui n'a pas d'inconvénient pratique, nous conclurons de ces observations, quelle que soit l'opinion qu'on ait de la solution précédente, qu'il convient, dans les cas ordinaires, de conserver la solution donnée au n° 1. On pourra avoir recours à la nouvelle solution lorsque l'on considérera des parements qui seraient horizontaux, ou auraient une très-petite inclinaison sur l'horizon.

---

[*] Si l'on suppose, par exemple, que l'on ait

$$\gamma = 0, \quad \varphi = 45^\circ, \quad \lambda = \alpha = 90^\circ, \quad \theta = 0,$$

on aura l'équation

$$2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0,$$

laquelle est satisfaite à très-peu près par $x = 0{,}38$, comprise entre $x = 0$ et $x = 1$; elle signifie que le plan de rupture fait avec le parement du mur un angle de $24^\circ 12'$; par le principe de Coulomb on aurait trouvé $22^\circ 30'$: la différence eût été assez petite; mais l'action perpendiculaire au parement eût été dans un cas (φ_1 étant l'angle que le plan de rupture fait avec le parement)

$$\frac{\frac{1}{2}pr^2 \tang \varphi_1 \cos(\varphi + \varphi_1) \sin \varphi_1}{\cos \varphi} = \tfrac{1}{2} pr^2 . 0{,}0925;$$

tandis que dans l'autre cas elle eût été

$$\tfrac{1}{2}pr^2 \tang^2 \varphi_1 = \tfrac{1}{2} pr^2 . 0{,}1716.$$

Le point d'application sur le parement eût été d'ailleurs le même.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. AUGUSTE MIQUEL,

Professeur de Mathématiques au Collége de Castres.

§ Ier.

1. Lorsque deux courbes se rencontrent, l'angle sous lequel elles se coupent se mesure par l'angle que forment entre elles les deux tangentes menées à chacune de ces lignes au point de leur intersection. Cet angle peut encore être considéré indépendamment des deux tangentes comme formé par l'intersection de deux éléments de ces courbes: ainsi, dans un espace infiniment petit, autour de l'intersection de deux lignes quelconques, l'angle curviligne ne diffère nullement d'un angle rectiligne. Il existe donc entre les quatre angles formés par deux lignes qui se coupent d'une manière quelconque dans l'espace, les mêmes relations qu'entre les quatre angles de deux droites qui se coupent. Si l'un des angles formés au point d'intersection des deux courbes est droit, les trois autres le sont aussi et les courbes se coupent orthogonalement.

2. Si plusieurs lignes comprises dans un plan se coupent en un même point, il existe encore entre tous les angles formés les mêmes relations qu'entre des angles rectilignes. Ces relations subsistent également si les courbes, au lieu d'être sur un plan, se trouvent seulement sur une même surface courbe; car, en prenant autour du point d'intersection une surface infiniment petite, on peut la considérer comme plane. On doit exclure de tout ceci les points et les arêtes de rebroussement.

3. Lorsque deux courbes se coupent sur un même plan, l'angle des deux normales menées au point de leur intersection, étant égal à

l'angle des deux tangentes, est par conséquent égal à l'angle des deux courbes. Il résulte de là que l'angle de deux circonférences de cercle qui se coupent sur un même plan est égal à l'angle des deux rayons qui aboutissent tous deux à un des deux points d'intersection, pourvu qu'on prenne pour l'angle des circonférences, parmi les quatre qu'elles forment à ce point, un angle dont les côtés soient tous deux dirigés dans le même sens à partir du point d'intersection; tous deux de gauche à droite par exemple, au-dessus de la ligne des centres.

4. Dans la suite de ce Mémoire, lorsque nous désignerons un angle par une seule lettre, on devra prendre parmi tous ceux qui pourraient avoir même sommet, celui entre les côtés duquel la lettre se trouve immédiatement comprise, ou, selon le sens du discours, tout autre angle qui lui aura été reconnu égal. Nous désignerons encore une ligne, une surface par un certain nombre de points par lesquels elle passe. Ces lignes, ces surfaces ne seront tracées que lorsque leur présence sera jugée utile à la clarté de la démonstration. Elles ne se trouveront déterminées que lorsqu'elles seront désignées par un nombre suffisant de points déjà déterminés. Ainsi a, b, c, d étant des points connus, sphère $abcd$ sera une sphère entièrement déterminée; tandis que par sphère a, b nous désignerons une des sphères qui passent par les points a et b; par sphère a, b, c une de celles qui passent par les points a, b, c. Si l'on écrit qu'on a sphère $abghl$, on indiquera que g, h, l sont des points qui se trouvent sur une même surface sphérique passant par les points a et b. Pareillement les expressions cercle $abcd$..., droite $abcd$... indiqueront que les points a, b, c, d... sont sur une même circonférence de cercle, sur une même droite. Il est clair que si l'on a à la fois plan $abcd$..., plan $a'bcd$..., il en résultera droite b, c, d...; pareillement de sphère $abcde$..., sphère $a'bcde$..., résultera cercle $bcde$.... Les circonférences et les sphères pourront encore être désignées par la lettre qui se trouve à leur centre.

Ces notions préliminaires étant établies, nous allons exposer quelques propositions relatives aux angles curvilignes. La considération de ces angles peut en effet être quelquefois utile dans la recherche ou l'exposition des propriétés des courbes, en remplaçant des constructions compliquées.

5. *Soient deux cercles* O *et* O′, *fig.* 1, *Pl. I, qui se coupent aux points* A *et* A′; *soient pris à volonté sur chacune de leurs circonférences les points* B *et* B′. *Soient* C *et* C′ *les centres des circonférences* BAB′. BA′B′. *L'angle* CBC′ *formé par les rayons des deux dernières circonférences est égal à l'angle* OAO′ *formé par les rayons des deux premières; et par suite les deux dernières circonférences se coupent sous le même angle que les deux premières.*

En effet, on a

$$\text{angle } CBC' = ABA' - CBA - C'BA',$$

ou bien

$$CBC' = ABA' - CAB - C'A'B;$$

on aura pareillement,

$$CB'C' = AB'A' - CAB' - C'A'B'$$

ajoutant terme à terme les deux égalités précédentes, on trouve

$$2CBC' = ABA' + AB'A' - BAB' - BA'B'.$$

Considérant maintenant les angles rectilignes qui ont leur sommet en A et A′, on a

$$OAO' = OAB' + O'AB - BAB',$$

ou bien

$$OAO' = OB'A + O'BA - BAB';$$

on trouve de même,

$$OA'O' = OB'A' + O'BA' - BA'B';$$

ajoutant membre à membre les deux dernières inégalités, on a

$$2OAO' = AB'A' + ABA' - BAB' - BA'B'.$$

Or cette valeur de 2OAO′ n'est autre chose que celle qui a été trouvée pour 2CBC′; donc

$$OAO' = CBC'.$$

D'après ce qui a été dit dans le n° 3, il résulte de là que les deux circon-

férences C et C′ se coupent sous le même angle que les circonférences O et O′. Ce qu'il fallait démontrer.

Du théorème précédent se déduit le suivant, comme cas particulier.

6 *Lorsque deux circonférences de cercle se coupent orthogonalement, si l'on mène deux autres circonférences qui passent chacune par un des points d'intersection des deux premières et toutes deux par deux autres points pris respectivement sur chaque circonférence, elles se couperont aussi orthogonalement en ces deux points.*

Toute ligne droite pouvant être considérée comme une circonférence de cercle infiniment grande, du théorème précédent on déduit le suivant.

7. *Si l'on prend à volonté un point sur le diamètre d'un cercle, ou sur son prolongement, et un point sur la circonférence, les deux circonférences de cercle qui passeront toutes deux par ces deux points et chacune par une des deux extrémités du diamètre, se couperont toujours orthogonalement.*

Comme le point pris sur le prolongement du diamètre peut être supposé à l'infini, il en résulte cette proposition connue, que tous les angles inscrits à la demi-circonférence sont droits.

8. *Lorsque quatre circonférences de cercle se coupent consécutivement deux à deux sur une même circonférence de cercle, leurs quatre autres points d'intersection se trouvent aussi sur une même circonférence de cercle.*

Soient les quatre circonférences AA′B′B, BB′C′C, CC′D′D, DD′A′A, *fig.* 2, qui se coupent sur une même circonférence ABCD, je dis que les quatre points A′B′C′D′ sont aussi sur une même circonférence de cercle. En effet, puisque dans tout quadrilatère inscrit au cercle, la somme de deux angles opposés est égale à deux angles droits, nous avons

$$\text{angle } A'AB = 2d - A'B'B,$$
$$\text{angle } C'CB = 2d - C'B'B.$$

Ajoutant membre à membre, on a

$$A'AB + C'CB = A'B'C';$$

on obtiendrait de même

$$A'AD + C'CD = A'D'C'.$$

Ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, il vient

$$BAD + DCB = A'B'C' + A'D'C'.$$

Or puisque les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence de cercle, on a

$$BAD + DCB = 2d;$$

donc on aura aussi

$$A'B'C' + A'D'C' = 2d.$$

Ce qui nous apprend que les quatre points A'B'C'D' sont situés sur une même circonférence de cercle.

9. *Lorsque trois circonférences de cercle* PAB, PBC, PCA, *fig.* 3, *se coupent en un même point* P, *la somme des trois angles du triangle curviligne* ABC *égale deux angles droits.*

En effet, l'angle B de ce triangle est égal à son symétrique NPR; l'angle A égal à son opposé par le sommet MAN, est par conséquent égal à l'angle MPN symétrique de ce dernier. De même, l'angle C égale l'angle RPS. Donc la somme des trois angles du triangle ABC, étant égale à la somme des trois angles MPN, NPR, RPS formés autour du point P d'un même côté de la ligne MPS, est égale à deux angles droits.

10. Réciproquement, *si la somme des trois angles du triangle curviligne* ABC, *formé par trois circonférences de cercle qui se coupent aux points* A, B, C, *est égale à deux angles droits, les trois circonférences se coupent en un même point.*

En effet, si la circonférence AC ne passait pas par le point P d'intersection des deux circonférences AB et BC, on pourrait mener par les trois points DAC une autre circonférence qui fournirait avec les arcs AB et BC un autre triangle curviligne dont la somme des trois angles serait évidemment plus grande ou plus petite que la somme des angles du premier triangle curviligne ABC. D'un autre côté, l'une de

ces deux sommes égale deux droits, par hypothèse, et l'autre égale aussi deux droits, d'après la proposition précédente; donc elles seraient égales entre elles, ce qui est absurde. Donc les trois circonférences AC, AB, BC se coupent en un même point.

§ II.

11. La proposition **9** peut évidemment s'énoncer ainsi qu'il suit : Trois points A, B, C étant donnés, si l'on prend à volonté sur leur plan un quatrième point P, la somme des trois angles du triangle curviligne ABC, formé par les trois circonférences PAB, PAC, PBC, sera égale à deux angles droits.

Si le point P est pris à l'infini sur le plan ABC, les trois arcs de circonférences AB, AC, BC se réduisent à des lignes droites. Nous retombons sur ce théorème connu : *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne quelconque* ABC *est toujours égale à deux angles droits.*

De la proposition **9** résulte évidemment le théorème suivant : *La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle qui passent tous par un même point* P, *est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.*

12. *Soit* I *un point quelconque ; soit décrit à partir d'un autre point* A *l'arc de cercle* AI *qu'on prolonge jusqu'au point* E; *soient pareillement décrits les arcs* EIB, BIF, FIC, CIG, GID, DIA; *la somme des angles curvilignes* A, B, C, D, E, F, G *est égale à deux angles droits.*

En effet, chacun de ces angles A, B, C, D, E, F, G a son symétrique au point I. Or ces angles symétriques forment avec leurs opposés par le sommet, qui leur sont égaux chacun à chacun, la somme de tous les angles qui se trouvent autour du point I. Mais cette somme égale quatre angles droits. Donc la somme des angles A, B, C, D, E, F, G, qui en est la moitié, égale deux angles droits.

Cette proposition est encore vraie dans le cas où le point I, *fig.* 5, n'est pas compris entre les points A, B, C..... Dans ce cas, les arcs AE, EB, BF, FC, CA, prolongés suffisamment, passant par le même point I,

on démontrerait absolument de la même manière que dans le cas précédent, que la somme des angles A, B, C, E, F égale deux droits.

13. Les angles A, B, C, E, F étant égaux à leurs opposés au sommet, on voit que, *dans tout polygone curviligne étoilé de dernière formation dont les côtés sont des circonférences de cercle, qui ont un point commun* I, *la somme des angles tels que* A, B, C, E, F *égale deux droits.*

Le point I pouvant être situé à l'infini, il devient évident que la proposition est encore vraie lorsque les côtés AE, EB, BF,... sont des lignes droites.

14. *Lorsqu'un polygone est inscrit à une courbe convexe quelconque, la somme de tous les angles, extérieurs au polygone, intérieurs à la courbe, formés à chaque sommet par la courbe et les côtés du polygone, est égale à quatre angles droits, quel que soit le nombre des côtés du polygone.*

En effet, la somme des trois angles, formés à chaque sommet du polygone par la courbe et les deux côtés du polygone qui aboutissent à ce sommet, est toujours égale à deux angles droits. Donc la somme des angles formés à chaque sommet par la courbe et les côtés du polygone, augmentée de tous les angles intérieurs du polygone, est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés. Or, si l'on joint par des droites chaque sommet à un même point pris dans l'intérieur du polygone, la somme des angles de tous les triangles ainsi formés sera aussi égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés. Donc la somme des angles formés par la courbe et les côtés du polygone plus la somme des angles intérieurs du polygone, égale la somme des angles de tous les triangles formés autour du point intérieur: et, retranchant de part et d'autre la somme des angles intérieurs du polygone, on voit que la somme des angles formés par la courbe et les côtés du polygone égale la somme de tous les angles formés autour du point intérieur au polygone, c'est-à-dire quatre angles droits.

Du théoreme **14** on déduit facilement le théoreme suivant: *Lorsqu'une portion de polygone est inscrite à un arc de courbe convexe de manière à avoir ses deux extrémités communes avec cet arc de courbe, la somme de tous les angles extérieurs au polygone, intérieurs à la courbe, restera constante, quelques variations que subissent la position et le nombre des sommets de la portion de polygone inscrite.*

15. Les propositions **9**, **10**, **12**, **13** sont encore vraies sur la surface de la sphère.

En effet, elles se fondent sur ce que, 1° les angles curvilignes qui, tracés sur un même plan y ont un sommet commun, ont entre eux les mêmes relations que s'ils étaient rectilignes; 2° lorsque deux circonférences de cercle se coupent sur un même plan, les angles symétriques qu'elles forment sont égaux entre eux.

Or, en premier lieu, les angles curvilignes qui, tracés sur une surface de sphère y ont tous un point commun, conservent encore entre eux les mêmes relations qu'ils auraient, s'ils étaient tracés sur une surface plane.

En second lieu, il est évident que, lorsque deux circonférences de cercle se coupent, les angles symétriques qu'elles forment sont égaux deux à deux, lors même que les plans de ces circonférences sont différents, car il ne peut pas y avoir de raison pour que l'un soit plus grand que l'autre. Nous pouvons, en outre, démontrer l'égalité de deux de ces angles symétriques de la manière suivante : Imaginons dans l'espace deux cercles O et C qui se coupent aux deux points A et A'. Menons au cercle O par les points A et A' les tangentes AM, A'M qui se coupent nécessairement en un point M du plan de ce cercle; menons de même au cercle C les tangentes AN et A'N qui se coupent au point N. En joignant MN, on a deux triangles MAN, MA'N qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun; car MN est un côté commun à ces deux triangles, MA égale MA' comme tangente menée par un même point à un même cercle, NA égale de même NA'; donc les triangles sont égaux, et par conséquent, l'angle MAN égale l'angle MA'N; mais ces deux angles sont égaux chacun à chacun à un des deux angles symétriques formés par les circonférences de cercle O et C; par conséquent ces deux derniers angles sont égaux entre eux.

Donc les propositions **9**, **10**, **12**, **13** sont encore vraies sur la surface de la sphère.

Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss;

PAR J.-A. SERRET.

Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg pour l'année 1824 renferment une Note, où Fuss s'occupe de rechercher quelle est la courbe qui jouit de la propriété, que ses arcs comptés à partir d'un point fixe soient parcourus dans le même temps que leurs cordes par un mobile pesant partant de l'état de repos, et il trouve, par une considération particulière et ingénieuse, que cette courbe est une lemniscate de paramètre arbitraire, dont l'axe fait un angle de 45 degrés avec la verticale, et dont le centre est au point fixe d'où part le mobile.

On peut arriver directement et d'une manière très-simple à ce résultat.

Si g désigne la pesanteur, t l'angle que fait avec la verticale le rayon vecteur r d'un point de la courbe, les temps employés par un même mobile à décrire successivement ce rayon vecteur et l'arc qu'il soutend, seront

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\,2\sqrt{\frac{r}{\cos t}}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{dt^2}}}{\sqrt{r\cos t}}\,dt,$$

t_0 étant la valeur de t correspondante à $r = 0$. Si l'on veut que le rapport de ces deux temps soit constant, en le désignant par α, on trouve, après une simple différentiation,

$$(\alpha^2-1)\cos^2 t\frac{dr^2}{dt^2}+2\alpha^2\sin t\cos t\, r\frac{dr}{dt}+(\alpha^2\sin^2 t-\cos^2 t)\,r^2=0.$$

Cette équation est homogène par rapport à r et $\frac{dr}{dt}$; on pourra donc l'intégrer dans tous les cas. Si l'on suppose $\alpha = 1$, elle devient

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}=\frac{\cos 2t}{\sin 2t},$$

d'où, en intégrant et désignant par a une constante arbitraire,

$$r^2 = 2a^2\sin 2t;$$

ce qui démontre complétement le théorème de Fuss.

MÉMOIRE
SUR LA THÉORIE DES MARÉES,

PAR M. CH. DELAUNAY.

Le phénomène des marées a déjà été l'objet des recherches d'un grand nombre de savants, et, quoique depuis longtemps ce phénomène soit rattaché au grand principe de la gravitation universelle, on est loin d'en avoir déduit l'explication des diverses circonstances principales qu'il présente.

Newton, et ensuite Bernoulli, en considérant la Terre comme sphérique et entièrement recouverte par la mer, supposent que la surface du liquide prend à chaque instant la figure qui convient à son équilibre sous les actions de la Lune et du Soleil. Chacun de ces astres, s'il agissait seul, lui donnerait la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé, dont l'axe serait dirigé vers le centre de cet astre; et comme ces deux ellipsoïdes diffèrent très-peu d'une sphère, on peut admettre qu'ils se superposent, c'est-à-dire que la hauteur de la surface de la mer au-dessus de la surface sphérique d'équilibre qu'elle prendrait si elle n'était soumise à aucune action extérieure, est égale à la somme des hauteurs des surfaces de chacun des ellipsoïdes au-dessus de cette surface sphérique au même point. Il est facile de voir quelles sont les conséquences de cette théorie; en effet, les deux ellipsoïdes lunaire et solaire ayant leurs axes constamment dirigés vers les astres qui les produisent, tourneront autour de la Terre avec des vitesses différentes, et chacun d'eux, en accomplissant une révolution entière, donnera lieu à deux pleines mers et deux basses mers, dans tous les points de la surface de la Terre, excepté aux deux pôles, où la hauteur de la mer ne variera qu'avec la déclinaison de l'astre. Si l'on suppose que le Soleil et la Lune se meuvent dans le plan de l'équateur, la pleine mer arrivera partout à midi

et à minuit lors des syzygies, et la marée sera plus forte à cette époque qu'à aucune autre: aux quadratures, la pleine mer arrivera au moment du passage de la Lune au méridien, puisque l'action de cet astre est plus forte que celle du Soleil, et la marée sera à son minimum; aux époques intermédiaires entre les syzygies et les quadratures, l'heure de la pleine mer avancera ou retardera plus ou moins sur le passage de la Lune au méridien. Ces conséquences ne sont évidemment pas d'accord avec ce qu'on observe dans nos ports, puisque, à l'époque des syzygies par exemple, la pleine mer, au lieu d'arriver à midi et à minuit, arrive à des heures très-différentes d'un port à l'autre, et que le maximum de la marée n'a lieu qu'environ un jour et demi après la syzygie. Newton attribue ces retards à l'inertie de la mer, qui conserverait encore son mouvement d'oscillation si l'action des astres cessait, et aussi en partie au frottement des eaux contre le fond.

Lorsque le Soleil et la Lune ne sont pas dans le plan de l'équateur, on reconnaît aisément que, d'après la théorie précédente, les choses doivent se passer à peu près de la même manière; la seule différence essentielle qui se présente, c'est que, en chaque point de la Terre non situé sur l'équateur, les deux marées d'un même jour sont inégales, et que leur différence peut être considérable, ce qui est encore contraire aux observations, d'après lesquelles la différence des deux marées d'un même jour est généralement très-petite relativement à chacune d'elles. Newton attribue cette nouvelle discordance entre la théorie et les observations, à la même cause par laquelle il a expliqué le retard de l'instant de la pleine mer syzygie sur le passage des astres au méridien, et celui du maximum de la marée sur le moment de la syzygie. Sur tous ces points Bernoulli adopte entièrement les idées de Newton. Mais, qu'on admette ou non les explications de ce grand géomètre, il n'en est pas moins évident que la théorie de l'équilibre de la mer à chaque instant doit être rejetée, puisque les conséquences nécessaires de cette théorie ne sont pas d'accord avec les observations.

Laplace, qui s'est beaucoup occupé des marées, a considéré de suite la question sous le véritable point de vue, en cherchant à déterminer les oscillations des eaux de la mer, qui ont lieu sous l'influence des actions de la Lune et du Soleil. Il est parvenu à résoudre complétement ce problème, en supposant que la mer recouvre entièrement la Terre,

à laquelle il a attribué la figure d'un ellipsoïde de révolution peu aplati, et en tenant compte de son mouvement de rotation sur elle-même, circonstance qui complique beaucoup la question. Il a reconnu ainsi que les retards de la plus grande marée sur l'instant de la syzygie, et de l'heure de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien, ne pouvaient en aucune manière être attribués à l'inertie des eaux de la mer, puisque, d'après son analyse rigoureuse, la plus grande marée doit avoir lieu à l'instant de la syzygie et au moment même du passage des astres au méridien. Il a vu aussi que, dans l'hypothèse qu'il avait adoptée, la différence entre les deux marées d'un même jour devenait d'autant plus faible que la profondeur de la mer était plus près d'être constante sur toute la surface de la Terre.

La théorie de Laplace, tout en faisant voir que la presque égalité entre les deux marées d'un même jour n'était pas contraire au principe de la gravitation universelle, puisque ces deux marées seraient égales dans un cas mathématiquement possible, celui d'une mer libre de toutes parts et également profonde, ne rendait pas compte des retards de la pleine mer sur le passage de la Lune, et de la plus grande marée sur la syzygie. Laplace attribue le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien, aux circonstances locales qui varient d'un port à un autre. Quant au retard de la plus grande marée sur l'instant de la syzygie, il semble avoir toujours gardé quelque incertitude sur sa cause. Dans son premier Mémoire sur les marées, il dit que ce retard lui semble être l'effet des obstacles que la mer éprouve dans ses oscillations; plus tard, dans son *Exposition du Système du Monde*, et aussi dans le t. V de la *Mécanique céleste*, il attribue ce retard à la réflexion des ondulations de la mer sur la côte orientale de l'Amérique, sans cependant donner cette explication comme bien certaine.

C'est le désir de connaître la véritable cause de ce retard du maximum de la marée sur l'instant de la syzygie, qui m'a fait entreprendre le travail dont je présente ici une première partie. Je me proposais pour cela de discuter les observations de marées faites à Brest, et publiées récemment par le Bureau des Longitudes; mais cette discussion ne pouvait être faite avec quelque avantage qu'autant que j'aurais eu des idées précises sur la manière dont se produisent les marées à Brest, et

en général dans la partie nord de l'océan Atlantique. Il est, en effet, d'une grande importance de savoir si ces marées sont produites directement par les actions de la Lune et du Soleil, ou bien si ce ne sont que des marées dérivées, et, dans ce cas, quelle est leur origine. La première idée m'avait toujours paru la plus naturelle et la plus probable. Cependant, en lisant les Mémoires que MM. Lubbock et Whewell ont présentés il y a quelques années à la Société royale de Londres, et qui ont pour objet la théorie des marées, j'ai vu, non sans quelque surprise, qu'ils adoptaient la seconde. Ils supposent que, dans la mer du Sud, les marées se produisent conformément à la théorie de Bernoulli, parce que cette mer, étant à peu près libre de continents tout autour de la Terre, se rapproche de l'hypothèse adoptée par ce géomètre; ils admettent en outre que ces marées de la mer du Sud produisent dans l'océan Atlantique des ondulations qui se propagent du sud au nord, et donnent lieu ainsi en grande partie aux marées qu'on observe sur les côtes de l'Europe. Les faits sur lesquels se fondent les deux savants anglais sont incontestables : mais en examinant attentivement ces faits, il m'a semblé qu'ils pouvaient très-bien s'accorder avec l'idée que les marées de la partie nord de l'océan Atlantique sont en grande partie des marées directes. L'objet principal de ce premier Mémoire est de faire connaître les divers motifs qui me portent à regarder cette idée comme exacte.

Pour arriver à des résultats concluants, j'ai dû chercher à comparer les marées produites dans une mer limitée, à celles qui auraient lieu si la mer était entièrement libre; mais l'extrême complication de la question m'a obligé à considérer un cas purement théorique qui ne peut pas se présenter dans la nature. Les notions que j'ai pu en déduire doivent néanmoins jeter quelque jour sur ce qui a lieu réellement. Comme je voulais m'occuper spécialement du mouvement des eaux en longitude, dans une mer limitée par deux méridiens, j'ai considéré la Terre comme ayant la figure d'un cylindre indéfini, dont l'axe serait la ligne des pôles, sur lequel serait répandu un liquide dont tous les mouvements, indépendants de l'état initial, s'effectueraient suivant des directions perpendiculaires aux génératrices. C'est ainsi que j'ai été conduit aux recherches analytiques contenues dans les trois premiers paragraphes de ce Mémoire; le quatrième renfermera les considérations

à l'aide desquelles je crois pouvoir démontrer que les marées se produisent directement dans la partie nord de l'océan Atlantique.

§ I.

Formules pour les attractions de cylindres.

1. Considérons un cylindre dont les génératrices soient parallèles à l'axe des x, dont la section normale soit très-peu différente d'un cercle ayant son centre sur cet axe, et dont la densité, variable en général d'un point à un autre, soit la même pour tous les points situés sur une parallèle aux génératrices. Nous allons nous proposer de déterminer l'attraction de ce cylindre sur un point dont les coordonnées sont a, b, c.

Soient x, y, z les coordonnées d'une molécule quelconque $d\mathrm{M}$ du cylindre : les composantes de l'attraction exercée par ce cylindre sur le point (a, b, c) seront, comme l'on sait, les dérivées partielles relatives à a, b, c, de la fonction

$$\int\int\int \frac{d\mathrm{M}}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

l'intégrale s'étendant à toutes les molécules du cylindre qu'on suppose indéfini dans le sens des x positives et dans le sens des x négatives. La composante parallèle à l'axe des x étant évidemment nulle, on peut, dans la fonction précédente, faire $a = 0$, puisque cette fonction est indépendante de a, et elle deviendra

$$\int\int\int \frac{d\mathrm{M}}{\sqrt{x^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}.$$

On peut regarder l'élément $d\mathrm{M}$ comme étant un prisme droit dont la base ω est infiniment petite, et dont la hauteur, parallèle à l'axe des x, est égale à dx; en sorte que, si l'on nomme ρ la densité de la molécule que l'on considère, densité qui ne sera fonction que de y et de z, on aura

$$d\mathrm{M} = \rho\omega\, dx.$$

Remplaçant $d\mathrm{M}$ par sa valeur, on pourra effectuer l'intégration relati-

vement à x; mais comme l'on devra étendre l'intégrale depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, la fonction deviendra infinie. Pour éviter la difficulté qui en résulterait, nous retrancherons de cette fonction une quantité également infinie, indépendante de b et de c, et telle que la différence conserve une valeur finie. Cette différence jouira toujours de la propriété de donner les attractions parallèles aux axes des y et des z, par des différentiations partielles relatives à b et à c.

Pour cela, supposons d'abord que l'intégrale relative à x soit prise entre les limites $-\alpha$ et $+\alpha$, et soit, pour un instant,

$$(b-y)^2+(c-z)^2=\zeta^2;$$

la fonction qu'on considère deviendra

$$\int\int\rho\omega\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dx}{\sqrt{\zeta^2+x^2}}=\int\int\rho\omega\, l.\frac{\alpha+\sqrt{\zeta^2+\alpha^2}}{-\alpha+\sqrt{\zeta^2+\alpha^2}}$$
$$=2\int\int\rho\omega\, l.\frac{\alpha+\sqrt{\zeta^2+\alpha^2}}{\zeta}=2\int\int\rho\omega\, l.(\alpha+\sqrt{\zeta^2+\alpha^2})-2\int\int\rho\omega\, l.\zeta.$$

Le premier terme devient infini pour $\alpha=\infty$; mais si l'on retranche de la fonction la quantité

$$2\int\int\rho\omega\, l.2\alpha,$$

la différence, que nous désignerons par V, deviendra

$$V=2\int\int\rho\omega\, l.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\alpha^2}}\right)-2\int\int\rho\omega\, l.\zeta;$$

et si l'on y fait $\alpha=\infty$, et qu'on remplace ζ par sa valeur, on aura

$$(1)\qquad V=-\int\int\rho\omega\, l.[(b-y)^2+(c-z)^2].$$

Cette fonction V satisfait, comme on peut s'en assurer, à l'équation aux différences partielles

$$(2)\qquad \frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=0,$$

en supposant toutefois que le point attiré ne fait pas partie de la masse du cylindre.

2. Transformons, pour plus de commodité, les coordonnées parallèles aux axes des y et des z en coordonnées polaires, et nommons r la distance du point attiré à l'axe des x, et ϖ l'angle que fait r avec le plan des xy : nous aurons évidemment

$$b = r\cos\varpi, \qquad c = r\sin\varpi.$$

Nous aurons de même, en désignant par R et ϖ' les quantités analogues pour un point quelconque du cylindre,

$$y = \mathrm{R}\cos\varpi', \qquad z = \mathrm{R}\sin\varpi',$$

et de plus

$$\omega = \mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,d\varpi';$$

la fonction V deviendra donc

$$\mathrm{V} = -\int\int\rho\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,d\varpi'\,l.[r^2 - 2\mathrm{R}r\cos(\varpi' - \varpi) + \mathrm{R}^2],$$

et par suite l'équation (2) se changera dans la suivante

$$(3) \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{d\varpi^2} + r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right) = 0.$$

3. Supposons d'abord que le cylindre soit de révolution autour de l'axe des x, et qu'il soit composé de couches de densité constante, également de révolution autour de cet axe, et nous pourrons déterminer complétement la valeur de V. En vertu de cette hypothèse, ρ ne dépend que de R, et V peut s'écrire ainsi, en indiquant les limites des intégrales :

$$\mathrm{V} = -\int_0^a \rho\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\int_0^{2\pi} d\varpi'\,l.[r^2 - 2\mathrm{R}r\cos(\varpi' - \varpi) + \mathrm{R}^2],$$

a étant le rayon du cylindre.

Si le point attiré est extérieur au cylindre, r est plus grand qu'une valeur quelconque de R : dans ce cas, V se décomposera dans les deux parties suivantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{V} = &-2\int_0^a \rho\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\int_0^{2\pi} d\varpi'\,l.r \\ &-\int_0^a \rho\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\int_0^{2\pi} d\varpi'\,l.\left[1 - 2\frac{\mathrm{R}}{r}\cos(\varpi' - \varpi) + \frac{\mathrm{R}^2}{r^2}\right].\end{aligned}$$

Mais, d'après une formule connue, on a

$$\int_0^{2\pi} d\varpi' l. \left[1 - 2\frac{R}{r}\cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2}\right] = 0,$$

tant que $\frac{R}{r} < 1$. On aura donc

$$V = -4\pi l. r \int_0^a \rho R dR;$$

et si l'on représente par M la masse d'une portion du cylindre comprise entre deux plans perpendiculaires à son axe, et distants l'un de l'autre de l'unité linéaire,

$$(4) \qquad V = -2Mlr.$$

Si le point attiré est intérieur au cylindre, on devra considérer successivement les couches du cylindre par rapport auxquelles ce point est intérieur, et celles par rapport auxquelles il est extérieur. Pour les premières, r est plus petit que R, et l'on verra, comme précédemment, que la partie de V qui s'y rapporte se réduit à

$$-2\int \rho R\, dR \int_0^{2\pi} d\varpi' l. R.$$

Cette partie étant indépendante de r et de ϖ, on voit que ces couches extérieures au point attiré n'exercent aucune action sur ce point; on peut donc ne pas tenir compte de cette partie de la valeur totale de V. Pour les couches par rapport auxquelles le point attiré est extérieur, r est plus grand que R : on pourra donc appliquer la formule (4), et l'on aura

$$(5) \qquad V = -2M_1 l. r,$$

M_1 étant ce que devient M lorsqu'on y supprime ce qui vient des couches extérieures au point attiré. M_1 est fonction de r; cependant, dans la différentiation de V par rapport à r, pour avoir l'attraction suivant cette ligne, on ne devra pas faire varier M_1. On trouvera ainsi pour cette attraction,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{2M_1}{r};$$

ou bien, si l'on remplace M_1 par sa valeur, dans l'hypothèse où ρ serait indépendant de R,

$$\frac{dV}{dr} = -2\pi\rho r.$$

4. Considérons maintenant le cas où les couches d'égale densité dont se compose le cylindre ne sont pas de révolution autour de l'axe des x, et cherchons à développer, dans ce cas, la fonction V en série convergente.

Si nous supposons d'abord que le point attiré soit extérieur au cylindre, nous pourrons développer V suivant les puissances inverses de r. Mais avant de faire ce développement, nous remarquerons que, pour $r = \infty$, V devient infini : nous décomposerons donc cette fonction en deux parties, de la manière suivante

$$V = 2\int\int \rho R\, dR\, d\varpi'\, l.\frac{1}{r} + 2\int\int \rho R\, dR\, d\varpi'\, l.\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{r}\cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2}}},$$

et la seconde partie pourra se développer suivant les puissances de $\frac{1}{r}$. Si l'on pose alors

$$V = U_0\, l.\frac{1}{r} + \frac{U_1}{r} + \frac{U_2}{r^2} + \ldots + \frac{U_n}{r^n} + \ldots,$$

on aura

$$U_0 = 2\int\int \rho R\, dR\, d\varpi',$$

et U_n sera déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 U_n}{d\varpi^2} = -n^2 U_n,$$

obtenue en remplaçant V par sa valeur dans l'équation (3). En intégrant, on trouve

$$U_n = A\cos n\varpi + B\sin n\varpi.$$

Nous remarquerons d'abord que U_0 représente le double de la masse d'une portion du cylindre, ayant pour hauteur l'unité linéaire. Quant à U_n, au lieu de chercher les valeurs des constantes A et B qu'il ren-

ferme, nous pouvons le déterminer directement de la manière suivante :

On a

$$1-2\frac{R}{r}\cos(\varpi'-\varpi)+\frac{R^2}{r^2}=\left[1-\frac{R}{r}e^{(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}\right]\left[1-\frac{R}{r}e^{-(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}\right];$$

$$l.\left[1-\frac{R}{r}e^{(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}\right]=-\left[\begin{array}{l}\frac{R}{r}e^{(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}+\frac{R^2}{2r^2}e^{2(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}+\ldots\\ \qquad\qquad+\frac{R^n}{nr^n}e^{n(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}+\ldots\end{array}\right];$$

$$l.\left[1-\frac{R}{r}e^{-(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}\right]=-\left[\begin{array}{l}\frac{R}{r}e^{-(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}+\frac{R^2}{2r^2}e^{-2(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}+\ldots\\ \qquad\qquad+\frac{R^n}{nr^n}e^{-n(\varpi'-\varpi)\sqrt{-1}}+\ldots\end{array}\right]:$$

on en déduit

$$l.\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{R}{r}\cos(\varpi'-\varpi)+\frac{R^2}{r^2}}}=\frac{R}{r}\cos(\varpi'-\varpi)+\frac{R^2}{2r^2}\cos 2(\varpi'-\varpi)+\ldots$$
$$+\frac{R^n}{nr^n}\cos n(\varpi'-\varpi)+\ldots,$$

et par suite, en substituant dans la valeur de V, on aura pour les coefficients U_0, U_1, U_2, ... les valeurs

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l}U_0=2\int\int\rho R\,dR\,d\varpi',\\ U_n=\frac{2}{n}\int\int\rho R^{n+1}\,dR\,d\varpi'\cos n(\varpi'-\varpi).\end{array}\right.$$

Lorsque le point attiré sera intérieur au cylindre, on décomposera V en deux parties : l'une, relative aux points situés plus près de l'axe des x que le point attiré, se déterminera comme dans le cas précédent; l'autre, relative aux points plus éloignés de l'axe des x que le point attiré, pourra se développer suivant les puissances de r. Pour cela, on mettra cette partie de V sous la forme

$$V=2\int\int\rho R\,dR\,d\varpi'\,l.\frac{1}{R}$$
$$+2\int\int\rho R\,dR\,d\varpi'\,l.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2r}{R}\cos(\varpi'-\varpi)+\frac{r^2}{R^2}}};$$

et si l'on pose

$$V = v_0 + rv_1 + r^2 v_1 + \ldots + r^n v_n + \ldots,$$

on trouvera, comme précédemment,

$$(7)\quad \begin{cases} v_0 = 2\int\int \rho R\, dR\, d\varpi'\, l \,.\, \frac{1}{R}, \\ v_n = \frac{2}{n}\int\int \frac{\rho\, dR\, d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi)}{R^{n-1}}. \end{cases}$$

5. Appliquons les formules précédentes au cas où le cylindre est homogène, et supposons que sa surface diffère peu d'une surface cylindrique de révolution autour de l'axe des x, dont le rayon serait a, et dont la section droite serait équivalente à celle du cylindre proposé. Soit $a(1+y')$ la distance d'un point quelconque de la surface du cylindre à l'axe, y' étant une très-petite quantité, fonction de ϖ', dont nous négligerons le carré. La valeur de U_n (6) se composera de deux parties, qui seront

$$U_n = \frac{2\rho}{n}\int_0^a R^{n+1}\, dR \int_0^{2\pi} d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi)$$
$$+ \frac{2\rho}{n}\int_0^{2\pi} a^{n+2}\, y'\, d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi).$$

La première partie, relative au cylindre de révolution, est nulle, comme il est facile de le voir; la seconde partie, relative à la différence entre le cylindre proposé et le cylindre de révolution, est donc la seule qui entre dans la valeur de U_n, et l'on aura

$$U_n = \frac{2\rho\, a^{n+2}}{n}\int_0^{2\pi} y' \cos n(\varpi' - \varpi)\, d\varpi'.$$

y' étant une fonction périodique de ϖ', nous pouvons supposer qu'elle soit développée en série de sinus et de cosinus des multiples de cet angle, et qu'on ait, par exemple,

$$y' = A_1 \cos\varpi' + A_2 \cos 2\varpi' + \ldots + A_n \cos n\varpi' + \ldots$$
$$+ B_1 \sin\varpi' + B_2 \sin 2\varpi' + \ldots + B_n \sin n\varpi' + \ldots.$$

On n'a pas mis de terme indépendant de ϖ', parce que la condition que le cylindre de rayon a ait une section droite équivalente à celle du cylindre proposé, exige qu'on ait

$$\int_0^{2\pi} y' \, d\varpi' = 0.$$

Si l'on met cette valeur de y' dans la valeur de U_n, on aura simplement

$$U_n = \frac{2\rho a^{n+2}}{n} \int_0^{2\pi} (A_n \cos n\varpi' + B_n \sin n\varpi') \cos n(\varpi' - \varpi) \, d\varpi';$$

ou bien, en effectuant l'intégration,

$$U_n = \frac{2\pi\rho a^{n+2}}{n} (A_n \cos n\varpi + B_n \sin n\varpi).$$

On aura donc pour V la valeur suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} V = 2\pi a^2 \rho l . \frac{1}{r} &+ \frac{2\pi\rho a^3}{r} (A_1 \cos \varpi + B_1 \sin \varpi) \\ &+ \frac{2\pi\rho a^4}{2r^2} (A_2 \cos 2\varpi + B_2 \sin 2\varpi) + \ldots \\ &+ \frac{2\pi\rho a^{n+2}}{n r^n} (A_n \cos n\varpi + B_n \sin n\varpi) + \ldots . \end{aligned} \right.$$

§ II.

Equations différentielles du mouvement d'un liquide, sur la surface d'un cylindre.

6. Nous allons considérer un cylindre solide (A), formé de couches homogènes dont les surfaces sont cylindriques et ont leurs génératrices toutes parallèles entre elles; nous supposerons que ce cylindre, d'une longueur indéfinie, soit animé d'un mouvement uniforme de rotation autour d'une parallèle à ses génératrices passant par son centre de gravité, et que sa surface soit recouverte en tout ou en partie par un liquide qui participe à son mouvement. Si ce liquide n'est soumis à aucune force autre que l'attraction du cylindre, il est facile de voir qu'il prendra un état d'équilibre tel, que sa surface soit

cylindrique et ait ses génératrices parallèles à l'axe de rotation. Supposons de plus que les diverses couches qui composent le cylindre soient presque de révolution autour de cet axe; il en résultera que la surface d'équilibre du liquide sera aussi très-peu différente de celle d'un cylindre de révolution autour du même axe. Nous admettrons enfin que la profondeur du liquide sur le cylindre soit très-petite relativement à son rayon.

Cela posé, concevons que le liquide soit soumis à des forces qui le dérangent de sa position d'équilibre; que ces forces, très-petites par rapport à l'attraction du cylindre, soient dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et que toutes celles qui agissent sur les molécules situées sur une même parallèle à l'axe soient égales et parallèles entre elles. Si les circonstances initiales du mouvement ont disparu, il est évident que chaque molécule ne sortira pas du plan perpendiculaire à l'axe qui la contient, et que les mouvements s'effectueront de la même manière dans tous les plans perpendiculaires à cet axe; en sorte que la surface du liquide restera cylindrique.

La détermination des équations différentielles du mouvement du liquide, dans les hypothèses précédentes, pourrait s'effectuer comme dans le dernier chapitre du livre premier de la *Mécanique céleste*; mais on peut y arriver plus simplement de la manière suivante.

7. Soient, dans l'état d'équilibre,

a, la valeur moyenne du rayon de la surface du liquide;

ay, la profondeur du liquide en un point quelconque;

ϖ, l'angle compris entre le plan qui passe par une molécule quelconque et par l'axe, et un plan passant aussi par cet axe, fixe par rapport au cylindre, et participant à son mouvement de rotation: en sorte que si t est le temps et n la vitesse angulaire du cylindre, $\varpi - nt$ soit l'angle compris entre le plan qui passe par la molécule et l'axe, et un plan, fixe dans l'espace, passant aussi par cet axe.

Soient, de plus, dans l'état de mouvement,

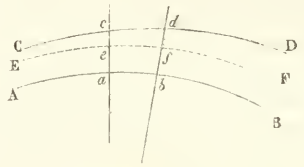
$\varpi + v$ ce que devient ϖ, v étant une fonction de t et de ϖ que nous supposerons indépendante de la distance de la molécule à l'axe;

et ay la hauteur d'un point quelconque de la surface du liquide, au-

dessus de la surface d'équilibre, y étant aussi une fonction de t et de ϖ.

v et y seront de très-petites quantités dont nous négligerons les carrés et les produits, et nous verrons bientôt que y est très-petit par rapport à v et à γ, et de l'ordre γv.

Menons un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et soit AB l'intersection de ce plan avec la surface de la partie solide; CD son inter-



section avec la surface du liquide, à un instant quelconque du mouvement; EF son intersection avec la surface d'équilibre de ce liquide; et ac, bd les traces de deux plans passant par l'axe et faisant entre eux un angle infiniment petit $d\varpi$. Nous allons considérer la portion de liquide renfermée dans le prisme droit infiniment petit, ayant pour base $abcd$, et pour hauteur dx; et en évaluant les forces qui lui sont appliquées, nous pourrons facilement trouver les équations de son mouvement, qui s'effectue à très-peu près perpendiculairement à ac.

Soit ρ la densité du liquide. Si nous remarquons que

$$ac = a(\gamma + y),$$

nous aurons

$$a^2(\gamma + y)\, d\varpi\, dx$$

pour le volume du prisme, et

$$\rho a^2(\gamma + y)\, d\varpi\, dx$$

pour la masse du liquide qu'il renferme. Si donc nous appelons V' la fonction dont les dérivées partielles représentent les forces qui dérangent le liquide de sa position d'équilibre, nous aurons

$$\frac{dV'}{a\,d\varpi}$$

pour la somme des composantes de ces forces perpendiculairement à ac, c'est-à-dire dans le sens du mouvement du liquide, et la force motrice qui en résultera pour le prisme sera

$$\rho a(\gamma + y)\, d\varpi\, dx \frac{dV'}{d\varpi}.$$

D'un autre côté, la face ac supporte, de plus que dans l'état d'équilibre, la pression provenant du liquide compris entre CD et EF, et, vu la petitesse de y relativement à γ, on peut considérer cette pression comme s'exerçant uniformément sur toute cette face; d'après cela, il est facile de voir que cette pression, supportée par la face ac, a pour valeur

$$a(\gamma + y)\, dx \times \rho g.ay = \rho g a^2 (\gamma + y) y\, dx,$$

g étant la pesanteur à la surface du cylindre, produite par son attraction. La pression qu'on vient d'évaluer est dirigée dans le sens du mouvement; mais il existe sur la face bd une pression analogue et dirigée en sens contraire, qui, en se transmettant sur la face ac, devient égale à

$$\rho g a^2 (\gamma + y)\, dx \left(y + \frac{dy}{d\varpi}\, d\varpi\right);$$

il résultera donc de ces deux pressions, la force

$$\rho g a^2 (\gamma + y) \frac{dy}{d\varpi}\, dx\, d\varpi,$$

dirigée en sens contraire du mouvement.

Remarquons enfin que la force accélératrice du liquide a pour expression $a \frac{d^2v}{dt^2}$, et nous en conclurons de suite l'équation différentielle

$$\rho a^2 (\gamma + y)\, d\varpi\, dx . a \frac{d^2v}{dt^2} = \rho a(\gamma + y)\, d\varpi\, dx \frac{dV'}{d\varpi}$$
$$- \rho g a^2 (\gamma + y)\, d\varpi\, dx \frac{dy}{d\varpi},$$

qui, en vertu des conventions précédentes, se réduit à

$$(9) \qquad a^2 \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dV'}{d\varpi} - ga \frac{dy}{d\varpi}.$$

8. L'équation que nous venons d'obtenir renferme deux inconnues, v et y; il nous faut donc encore une équation entre ces deux quantités pour pouvoir les déterminer. C'est ce que nous obtiendrons facilement en exprimant la continuité du liquide.

Pour cela, considérons, dans l'état d'équilibre, un prisme infiniment petit, analogue à celui du numéro précédent; son volume sera

$$a^2\gamma\, d\varpi\, dx.$$

En passant de l'état d'équilibre à l'état de mouvement, la profondeur du liquide devient $a(\gamma+y)$, et ϖ augmente de v. On devra donc augmenter γ de $y+\frac{d(\gamma+y)}{d\varpi}v$, et $d\varpi$ de $\frac{dv}{d\varpi}d\varpi$, et l'on aura pour la nouvelle valeur du volume de ce prisme

$$a^2\left(\gamma+y+v\frac{d\gamma}{d\varpi}+v\frac{dy}{d\varpi}\right)\left(d\varpi+\frac{dv}{d\varpi}d\varpi\right)dx.$$

En égalant ces deux valeurs, et supprimant les termes qui doivent être négligés, d'après les conventions du numéro précédent, on trouve

$$(10)\qquad y=-\frac{d.\gamma v}{d\varpi}.$$

Cette équation montre ce que nous avons avancé dans le numéro précédent, c'est-à-dire que y est de l'ordre γv.

9. Nous supposerons que les forces qui dérangent le liquide de son état d'équilibre proviennent de l'action qu'exerce sur ce liquide un autre cylindre (B), de longueur indéfinie, parallèle au premier, et doué d'un mouvement uniforme de révolution autour de l'axe de ce premier cylindre, leur distance mutuelle restant d'ailleurs constante. L'attraction de ce nouveau cylindre sur les molécules liquides ne sera cependant pas la seule force dont V′ doive fournir les composantes : en effet, la surface du liquide étant modifiée par la présence de ce cylindre extérieur, chaque molécule n'est plus attirée par le cylindre dont elle fait partie, de la même manière qu'auparavant. On peut concevoir l'attraction qu'elle éprouve comme se composant de l'attraction du cylindre solide et du liquide qui le recouvre dans l'état d'équilibre, et de l'attraction d'une couche de liquide dont l'épaisseur

variable est ay, et qui, positive en certains points, négative en d'autres, constitue la différence entre l'état actuel du liquide et son état d'équilibre. L'attraction de cette couche est une force qui n'existe pas dans l'état d'équilibre, et qui contribue à produire le mouvement que nous voulons déterminer. V′ se composera donc de deux parties : 1° celle qui dépend de l'action de cette couche liquide, d'épaisseur ay, sur la molécule dont nous cherchons le mouvement; 2° celle qui provient de l'action directe du cylindre (B) sur cette molécule. Nous remarquerons enfin que, comme nous ne nous occupons que des mouvements relatifs du liquide par rapport à la partie solide du cylindre, nous devrons appliquer à chaque molécule une force accélératrice égale, parallèle et contraire à celle à laquelle l'axe de ce cylindre est soumis par l'action de chacune des causes dont nous venons de parler.

10. Pour déterminer la première partie de la valeur de V′, celle qui dépend de l'action de la couche liquide, d'épaisseur ay, sur la molécule que nous considérons, nous devons évidemment négliger l'action de cette couche sur l'axe du cylindre, et nous aurons, d'après le n° **2**,

$$V' = -\rho a^2 \int y' d\varpi' l.[r^2 - 2ar\cos(\varpi' - \varpi) + a^2];$$

y' étant ce que devient y lorsqu'on y remplace ϖ par ϖ', et r étant la distance de la molécule attirée à l'axe du cylindre. Cette distance r devra être remplacée par a dans les valeurs des dérivées partielles de V′.

Si nous supposons que y' puisse se développer en série de sinus et de cosinus des multiples de ϖ', et qu'on ait

$$\begin{aligned} y' = {} & A_1 \cos\varpi' + A_2 \cos 2\varpi' + \ldots + A_n \cos n\varpi' + \ldots \\ & + B_1 \sin\varpi' + B_2 \sin 2\varpi' + \ldots + B_n \sin n\varpi' + \ldots. \end{aligned}$$

nous en déduirons, comme au n° **5**,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} V' = {} & \frac{2\pi\rho a^3}{r}(A_1 \cos\varpi + B_1 \sin\varpi) + \frac{2\pi\rho a^4}{2.r^2}(A_2 \cos 2\varpi + B_2 \sin 2\varpi) + \ldots \\ & + \frac{2\pi\rho a^{n+2}}{n.r^n}(A_n \cos n\varpi + B_n \sin n\varpi) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

11. Déterminons maintenant la seconde partie de V′, celle qui provient de l'action du cylindre (B). Les dimensions de la section droite de ce nouveau cylindre étant supposées très-petites relativement à sa distance au premier, nous regarderons toute sa masse comme étant concentrée sur son axe. Soient m la masse de l'unité de longueur de ce cylindre, q sa distance à l'axe du premier cylindre, et ϖ_1 l'angle que fait le plan qui passe par les deux axes avec le plan mobile à partir duquel se compte l'angle ϖ (n° **7**). r et ϖ étant toujours les coordonnées de la molécule dont on cherche le mouvement, on aura pour la partie de V′ qui vient de l'action du cylindre (B) [n° **2**],

$$V' = -ml.[r^2 - 2qr\cos(\varpi_1 - \varpi) + q^2].$$

La force accélératrice provenant de l'attraction de ce cylindre sur l'axe du cylindre (A) est égale à $\frac{2m}{q}$; on doit donc appliquer à la molécule que l'on considère une force égale à $-\frac{2m}{q}$, dans la même direction. Pour obtenir la partie de V′ qui vient de cette force, nous la décomposerons suivant deux directions rectangulaires, dont l'une soit parallèle au plan qui sert d'origine à ϖ_1, et nous trouverons les deux composantes

$$-\frac{2m}{q}\cos\varpi_1, \qquad -\frac{2m}{q}\sin\varpi_1.$$

Multipliant ces deux forces par les éléments dy et dz de leurs directions, ajoutant, et prenant l'intégrale, nous aurons

$$-\frac{2m}{q}(y\cos\varpi_1 + z\sin\varpi_1) + \text{const.},$$

ou bien

$$-\frac{2mr}{q}\cos(\varpi_1 - \varpi) + \text{const.},$$

en remarquant que

$$y = r\cos\varpi, \qquad z = r\sin\varpi.$$

La valeur complete de V′ provenant de l'action du cylindre (B) sera

donc

$$V' = -ml.[r^2 - 2qr\cos(\varpi_1 - \varpi) + q^2] - \frac{2mr}{q}\cos(\varpi_1 - \varpi) + \text{const.};$$

ou bien, en déterminant la constante de manière que V′ soit nul, pour $r = 0$,

$$V' = -ml.\left[1 - 2\frac{r}{q}\cos(\varpi_1 - \varpi) + \frac{r^2}{q^2}\right] - \frac{2mr}{q}\cos(\varpi_1 - \varpi).$$

En développant suivant les puissances de r, comme au n° 4, on trouve

$$V' = \frac{2mr^2}{2q^2}\cos 2(\varpi_1 - \varpi) + \frac{2mr^3}{3q^3}\cos 3(\varpi_1 - \varpi) + \ldots$$
$$+ \frac{2mr^n}{nq^n}\cos n(\varpi_1 - \varpi) + \ldots.$$

q étant très-grand par rapport à r, qui devra être remplacé par a, dans les dérivées partielles de V′, nous ne conserverons que le premier terme de cette valeur de V′; d'un autre côté, on a

$$\varpi_1 = (n - n')t - \lambda,$$

n′ étant la vitesse angulaire du cylindre (B) autour du cylindre (A), et $-\lambda$ étant la valeur de ϖ_1 pour $t = 0$; nous aurons donc

$$V' = \frac{mr^2}{q^2}\cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi]. \tag{12}$$

12. La valeur que nous venons de trouver, pour la partie de V′ qui vient de l'action directe du cylindre (B), peut se mettre sous la forme suivante

$$V' = \frac{ma^2}{q^2}\cos 2\varpi\cos 2[(n - n')t - \lambda] + \frac{ma^2}{q^2}\sin 2\varpi\sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

en développant le cosinus, et remplaçant r par a, ce qu'on peut faire, puisqu'on n'a pas besoin de la dérivée $\frac{dV'}{dr}$. Comme nous supposons que le mouvement du liquide est uniquement dû à l'action du cylindre (B), et que les circonstances initiales du mouvement ont disparu, nous aurons évidemment

$$v = v_1\cos 2[(n - n')t - \lambda] + v_2\sin 2[(n - n')t - \lambda],$$
$$y = y_1\cos 2[(n - n')t - \lambda] + y_2\sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

v_1, v_2, y_1, y_2 étant des fonctions de ϖ, indépendantes de t. La partie de V', qui dépend de y, et qui a été déterminée au n° **10**, se mettra donc également sous la forme

$$V' = V'_1 \cos 2[(n - n')t - \lambda] + V'_2 \sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

V'_1 et V'_2 étant ce que devient V' lorsqu'on remplace y par y_1 et y_2.

Cela posé, les équations (9) et (10) donneront les quatre équations suivantes, pour déterminer v_1 et y_1, v_2 et y_2, quelle que soit la valeur de γ en fonction de ϖ,

$$(13)\quad \begin{cases} -\dfrac{2ma^2}{q^2}\sin 2\varpi + \dfrac{dV'_1}{d\varpi} - ga\dfrac{dy_1}{d\varpi} = -4a^2(n - n')^2 v_1, \\ y_1 = -\dfrac{d.\gamma v_1}{d\varpi}; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{2ma^2}{q^2}\cos 2\varpi + \dfrac{dV'_2}{d\varpi} - ga\dfrac{dy_2}{d\varpi} = -4a^2(n - n')^2 v_2, \\ y_2 = -\dfrac{d.\gamma v_2}{d\varpi}. \end{cases}$$

§ III.

Intégration des équations différentielles du mouvement d'un liquide sur un cylindre, dans diverses hypothèses sur la loi de la profondeur de ce liquide.

15. Nous avons déterminé, dans le paragraphe précédent, les équations différentielles du mouvement très-petit d'un liquide à la surface d'un cylindre (A), en supposant que les circonstances initiales du mouvement aient disparu, et que ce mouvement soit produit par l'action d'un autre cylindre (B), parallèle au premier, et doué d'un mouvement uniforme de révolution autour de ce premier cylindre. Nous allons maintenant nous occuper d'intégrer ces équations différentielles, dans diverses hypothèses sur la loi de la profondeur du liquide, à la surface du cylindre (A), dans l'état d'équilibre.

PREMIER CAS. *γ constant, sur toute la surface du cylindre.*

Dans ce cas les équations (13) et (14) donnent, par l'élimination

de y_1 et y_2,

$$g\gamma a\frac{d^2 v_1}{d\varpi^2} + 4a^2(\mathrm{n}-\mathrm{n}')^2 v_1 + \frac{d\mathrm{V}'_1}{d\varpi} - \frac{2ma^2}{q^2}\sin 2\varpi = 0,$$

$$g\gamma a\frac{d^2 v_2}{d\varpi^2} + 4a^2(\mathrm{n}-\mathrm{n}')^2 v_2 + \frac{d\mathrm{V}'_2}{d\varpi} + \frac{2ma^2}{q^2}\cos 2\varpi = 0.$$

Si l'on suppose

$$v_1 = \mathrm{A}\sin 2\varpi, \qquad v_2 = \mathrm{B}\cos 2\varpi,$$

on aura

$$y_1 = -2\gamma\mathrm{A}\cos 2\varpi, \qquad y_2 = 2\gamma\mathrm{B}\sin 2\varpi;$$

et par suite, d'après le n° **10**,

$$\mathrm{V}'_1 = -\frac{2\pi\rho\gamma\mathrm{A}a^4}{r^2}\cos 2\varpi, \qquad \mathrm{V}'_2 = \frac{2\pi\rho\gamma\mathrm{B}a^4}{r^2}\sin 2\varpi.$$

On déduit de là, en différentiant par rapport à ϖ, et remplaçant r par a (n° **10**),

$$\frac{d\mathrm{V}'_1}{d\varpi} = 4\pi\rho a^2\gamma\mathrm{A}\sin 2\varpi, \qquad \frac{d\mathrm{V}'_2}{d\varpi} = 4\pi\rho a^2\gamma\mathrm{B}\cos 2\varpi.$$

En substituant dans les équations différentielles en v_1 et v_2, on trouvera les relations suivantes, pour déterminer A et B,

$$-4g\gamma a\mathrm{A} + 4a^2(\mathrm{n}-\mathrm{n}')^2\mathrm{A} + 4\pi\rho a^2\gamma\mathrm{A} - \frac{2ma^2}{q^2} = 0,$$

$$-4g\gamma a\mathrm{B} + 4a^2(\mathrm{n}-\mathrm{n}')^2\mathrm{B} + 4\pi\rho a^2\gamma\mathrm{B} + \frac{2ma^2}{q^2} = 0;$$

et si l'on pose

$$\frac{2ma}{g\gamma q^2} = \mathrm{L}, \qquad \frac{4a(\mathrm{n}-\mathrm{n}')^2}{g\gamma} = i^2, \qquad \frac{2\pi\rho a}{g} = \alpha,$$

on aura, pour A et B, les valeurs suivantes :

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{L}}{4-i^2-2\alpha}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{L}}{4-i^2-2\alpha}.$$

On aura donc

$$y_1 = \frac{2\gamma\mathrm{L}}{4-i^2-2\alpha}\cos 2\varpi, \qquad y_2 = \frac{2\gamma\mathrm{L}}{4-i^2-2\alpha}\sin 2\varpi,$$

et enfin

$$y = \frac{2\gamma L}{4 - i^2 - 2\alpha} \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi].$$

Cette valeur de y nous montre qu'en chaque point de la surface du cylindre (A), la hauteur du liquide variera périodiquement; que pendant que le cylindre (B) fera un tour entier autour du premier, cette hauteur atteindra deux fois son maximum, et deux fois son minimum; enfin que si

$$4 - i^2 - 2\alpha$$

est positif, le maximum aura lieu au moment même où le cylindre (B) passe dans le plan qui renferme l'axe du cylindre (A), et le point qu'on considère sur la surface de ce cylindre. (Nous nommerons désormais ce plan, *plan méridien*, ou simplement *méridien* de ce point de la surface.) Si cette quantité était négative, ce serait le minimum de y qui aurait lieu au moment du passage du cylindre (B) au méridien.

14. Avant d'aller plus loin, nous allons tâcher de fixer nos idées sur la signification des quantités i^2 et α. Nous avons d'abord

$$i^2 = \frac{4a(n - n')^2}{g\gamma}.$$

Or, si n' est petit relativement à n, comme nous le supposerons, $a(n - n')^2$ est à peu près égal à la force centrifuge qui est développée sur la surface du cylindre (A) par son mouvement de rotation autour de son axe; et g est la pesanteur à la surface de ce cylindre : *i^2 est donc à peu près égal à quatre fois le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, divisé par la quantité γ.* Et l'on se rappelle que γ est le rapport de la profondeur du liquide au rayon du cylindre.

Nous avons ensuite

$$\alpha = \frac{2\pi\rho a}{g}.$$

Or nous pouvons facilement trouver la valeur de g en fonction du rayon a du cylindre (A), et de sa densité moyenne que nous représenterons par ρ_1 : en effet, les diverses couches du cylindre étant à peu près de révolution autour de son axe, on peut prendre pour V la va-

leur (4); et comme l'on a

$$g = -\frac{dV}{dr},$$

en ayant soin de remplacer r par a après la différentiation, on aura

$$g = \frac{2M}{a}.$$

Mais $M = \pi a^2 \rho_1$; on aura donc

$$g = 2\pi\rho_1 a,$$

et par suite

$$\alpha = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Donc α *représente le rapport de la densité du liquide à la densité moyenne du cylindre.*

Deuxième cas. $\gamma = \gamma_1(1 - 2k\cos s\varpi)$, *$k$ étant plus petit que $\frac{1}{2}$, et s étant entier.*

15. Déterminons d'abord γ_1 et ν_1, et pour cela posons

$$\gamma\nu_1 = \gamma_1\zeta_1,$$

nous aurons

$$\gamma_1 = -\gamma_1\frac{d\zeta_1}{d\varpi},$$

et par suite, la première des équations (13) deviendra

$$g a\gamma_1(1 - 2k\cos s\varpi)\frac{d^2\zeta_1}{d\varpi^2} + 4a^2(n - n')^2\zeta_1 + (1 - 2k\cos s\varpi)\frac{dV'_1}{d\varpi}$$
$$- \frac{2ma^2}{q^2}\sin 2\varpi(1 - 2k\cos s\varpi) = 0.$$

Il est facile de voir, en déterminant par des approximations successives la valeur de ζ_1, ordonnée suivant les puissances croissantes de k, que cette valeur ne peut être que de la forme suivante:

$$\zeta_1 = A_2\sin 2\varpi + A_{s-2}\sin(s-2)\varpi + A_{s+2}\sin(s+2)\varpi$$
$$+ A_{2s-2}\sin(2s-2)\varpi + A_{2s+2}\sin(2s+2)\varpi + \ldots;$$

il en résulte

$$\gamma_1 = -\gamma_1 \begin{bmatrix} 2A_2 \cos 2\varpi + (s-2) A_{s-2} \cos(s-2)\varpi \\ + (s+2) A_{s+2} \cos(s+2)\varpi + (2s-2) A_{2s-2} \cos(2s-2)\varpi \\ + (2s+2) A_{2s+2} \cos(2s+2)\varpi + \ldots \end{bmatrix},$$

et l'on aura

$$V'_1 = -\gamma_1 2\pi\rho a^2 \begin{bmatrix} A_2 \cos 2\varpi + A_{s-2} \cos(s-2)\varpi \\ + A_{s+2} \cos(s+2)\varpi + A_{2s-2} \cos(2s-2)\varpi \\ + A_{2s+2} \cos(2s+2)\varpi + \ldots \end{bmatrix}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation différentielle, qu'on développe, et qu'on égale à zéro les coefficients des sinus des divers multiples de ϖ (en supposant que s soit tel qu'on n'ait pas

$$ns - 2 = n's + 2,$$

ce qui exclut les valeurs

$$s = 1, \quad s = 2, \quad s = 4),$$

on obtient les relations suivantes, dans lesquelles L, i^2 et α représentent les mêmes quantités que précédemment, sauf que γ est remplacé par γ_1,

$$(i^2 + 2\alpha - 2^2) A_2 - (s-2)(s-2-\alpha) A_{s-2} k + (s+2)(s+2-\alpha) A_{s+2} k - L = 0,$$

$$(2\alpha - 2^2) A_2 k + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2] A_{s-2} + (2s-2)(2s-2-\alpha) A_{2s-2} k - L k = 0,$$

$$(2^2 - 2\alpha) A_2 k + [i^2 + (s+2)\alpha - (s+2)^2] A_{s+2} + (2s+2)(2s+2-\alpha) A_{2s+2} k + L k = 0,$$

$$(s-2)(s-2-\alpha) A_{s-2} k + [i^2 + (2s-2)\alpha - (2s-2)^2] A_{2s-2} + (3s-2)(3s-2-\alpha) A_{3s-2} k = 0,$$

$$(s+2)(s+2-\alpha) A_{s+2} k + [i^2 + (2s+2)\alpha - (2s+2)^2] A_{2s+2} + (3s+2)(3s+2-\alpha) A_{3s+2} k = 0,$$

$$(2s-2)(2s-2-\alpha) A_{2s-2} k + [i^2 + (3s-2)\alpha - (3s-2)^2] A_{3s-2} + (4s-2)(4s-2-\alpha) A_{4s-2} k = 0,$$

$$(2s+2)(2s+2-\alpha) A_{2s+2} k + [i^2 + (3s+2)\alpha - (3s+2)^2] A_{3s+2} + (4s+2)(4s+2-\alpha) A_{4s+2} k = 0,$$

etc.

Ces relations, à partir de la quatrième, se forment d'après une loi évidente. Pour en déduire les valeurs des coefficients A_2, A_{s-2}, A_{s+2}, etc.. on peut remarquer que si l'on développe ces coefficients suivant les puissances croissantes de k, le premier terme de A_2 sera indépendant de k; les premiers termes de A_{s-2} et A_{s+2} seront divisibles par k; et, en général, les premiers termes de A_{ns-2} et A_{ns+2} seront divisibles par k^n.

Si donc on pose

$$\begin{aligned}
A_2 &= A_2^{(0)} + A'_2 k + A''_2 k^2 + A'''_2 k^3 + \ldots,\\
A_{s-2} &= A'_{s-2} k + A''_{s-2} k^2 + A'''_{s-2} k^3 + \ldots,\\
A_{s+2} &= A'_{s+2} k + A''_{s+2} k^2 + A'''_{s+2} k^3 + \ldots,\\
A_{2s-2} &= A''_{2s-2} k^2 + A'''_{2s-2} k^3 + \ldots,\\
A_{2s+2} &= A''_{2s+2} k^2 + A'''_{2s+2} k^3 + \ldots,\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

et qu'on substitue dans les équations précédentes, on trouvera, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de k,

$$\begin{aligned}
&(i^2+2\alpha-2^2)A_2^{(0)} - L = 0,\\
&(i^2+2\alpha-2^2)A'_2 = 0,\\
&(i^2+2\alpha-2^2)A''_2 - (s-2)(s-2-\alpha)A'_{s-2} + (s+2)(s+2-\alpha)A'_{s+2} = 0,\\
&(i^2+2\alpha-2^2)A'''_2 - (s-2)(s-2-\alpha)A''_{s-2} + (s+2)(s+2-\alpha)A''_{s+2} = 0,\\
&\quad\text{etc.};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2\alpha-2^2)A_2^{(0)} + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2]A'_{s-2} - L = 0,\\
&(2\alpha-2^2)A'_2 + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2]A''_{s-2} = 0,\\
&\quad\text{etc., etc.};
\end{aligned}$$

relations au moyen desquelles on déterminera facilement les valeurs de

$$A_2^{(0)},\quad A'_2,\quad A''_2, \ldots,\qquad A'_{s-2},\quad A''_{s-2}, \ldots,\qquad A'_{s+2},\quad A''_{s+2}, \ldots, \text{ etc.}$$

On peut remarquer immédiatement qu'il résulte de ces relations, qu'on a

$$A'_2 = 0,\quad A''_{s-2} = 0,\quad A''_{s+2} = 0,\quad A'''_2 = 0,\quad A'''_{2s-2} = 0,\quad A'''_{2s+2} = 0, \ldots;$$

c'est-à-dire que généralement A_{ns-2} et A_{ns+2} ne renferment que les puissances paires de k, si n est pair, et qu'ils ne renferment que les puissances impaires de k, si n est impair.

En opérant de la même manière sur les équations (14), et posant

$$\gamma v_2 = \gamma_1 \zeta_2,$$

nous trouverons, pour déterminer ζ_2, l'équation différentielle

$$ga\gamma_1(1-2k\cos s\varpi)\frac{d^2\zeta_2}{d\varpi^2}+4a^2(\mathrm{n}-\mathrm{n}')^2\zeta_2+(1-2k\cos s\varpi)\frac{dV'_2}{d\varpi}$$
$$+\frac{2ma^2}{q^2}\cos 2\varpi(1-2k\cos s\varpi)=0.$$

Si nous posons ensuite

$$\zeta_2=\mathrm{B}_2\cos 2\varpi+\mathrm{B}_{s-2}\cos(s-2)\varpi+\mathrm{B}_{s+2}\cos(s+2)\varpi$$
$$+\mathrm{B}_{2s-2}\cos(2s-2)\varpi+\mathrm{B}_{2s+2}\cos(2s+2)\varpi+\ldots.$$

nous en déduirons les valeurs de γ_2 et de V'_2, et en substituant dans l'équation différentielle, nous trouverons les relations suivantes, qui serviront à déterminer les coefficients de la valeur de ζ_2 :

$$(i^2+2\alpha-2^2)\mathrm{B}_2+(s-2)(s-2-\alpha)\mathrm{B}_{s-2}k+(s+2)(s+2-\alpha)\mathrm{B}_{s+2}k+\mathrm{L}=0,$$
$$(2^2-2\alpha)\mathrm{B}_2k+[i^2+(s-2)\alpha-(s-2)^2]\mathrm{B}_{s-2}+(2s-2)(2s-2-\alpha)\mathrm{B}_{2s-2}k-\mathrm{L}k=0,$$
$$(2^2-2\alpha)\mathrm{B}_2k+[i^2+(s+2)\alpha-(s+2)^2]\mathrm{B}_{s+2}+(2s+2)(2s+2-\alpha)\mathrm{B}_{2s+2}k-\mathrm{L}k=0,$$
$$(s-2)(s-2-\alpha)\mathrm{B}_{s-2}k+[i^2+(2s-2)\alpha-(2s-2)^2]\mathrm{B}_{2s-2}+(3s-2)(3s-2-\alpha)\mathrm{B}_{3s-2}k=0,$$
$$(s+2)(s+2-\alpha)\mathrm{B}_{s+2}k+[i^2+(2s+2)\alpha-(2s-2)^2]\mathrm{B}_{2s-2}+(3s+2)(3s+2-\alpha)\mathrm{B}_{3s+2}k=0,$$
$$(2s-2)(2s-2-\alpha)\mathrm{B}_{2s-2}k+[i^2+(3s-2)\alpha-(3s-2)^2]\mathrm{B}_{3s-2}+(4s-2)(4s-2-\alpha)\mathrm{B}_{4s-2}k=0,$$
$$(2s+2)(2s+2-\alpha)\mathrm{B}_{2s+2}k+[i^2+(3s+2)\alpha-(3s+2)^2]\mathrm{B}_{3s+2}+(4s+2)(4s+2-\alpha)k\mathrm{B}_{4s+2}=0,$$

etc.

A l'inspection de ces relations, on reconnaît immédiatement que l'on a

$$\mathrm{B}_2=-\mathrm{A}_2,\quad \mathrm{B}_{s-2}=\mathrm{A}_{s-2},\quad \mathrm{B}_{s+2}=-\mathrm{A}_{s+2},\quad \mathrm{B}_{2s-2}=\mathrm{A}_{2s-2}.$$
$$\mathrm{B}_{2s+2}=-\mathrm{A}_{2s+2},\ldots:$$

et, en général,

$$\mathrm{B}_{ns-2}=\mathrm{A}_{ns-2},\quad \mathrm{B}_{ns+2}=-\mathrm{A}_{ns+2}.$$

D'après cela, nous aurons pour γ_1 et γ_2 les valeurs

$$\gamma_1=-\gamma_1\left[\begin{array}{l}2\mathrm{A}_2\cos 2\varpi+(s-2)\mathrm{A}_{s-2}\cos(s-2)\varpi\\+(s+2)\mathrm{A}_{s+2}\cos(s+2)\varpi+(2s-2)\mathrm{A}_{2s-2}\cos(2s-2)\varpi\\+(2s+2)\mathrm{A}_{2s+2}\cos(2s+2)\varpi+\ldots\end{array}\right],$$

$$\gamma_2=-\gamma_1\left[\begin{array}{l}2\mathrm{A}_2\sin 2\varpi-(s-2)\mathrm{A}_{s-2}\sin(s-2)\varpi\\+(s+2)\mathrm{A}_{s+2}\sin(s+2)\varpi-(2s-2)\mathrm{A}_{2s-2}\sin(2s-2)\varpi\\+(2s+2)\mathrm{A}_{2s+2}\sin(2s+2)\varpi-\ldots\end{array}\right];$$

et comme on a

$$y = y_1 \cos 2[(n - n')t - \lambda] + y_2 \sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

il en résultera

$$y = -\gamma_1 \left\{ \begin{array}{l} 2A_2 \cos 2[(n-n')t-\lambda-\varpi] + (s-2) A_{s-2} \cos[2(n-n')t - 2\lambda + (s-2)\varpi] \\ + (s+2) A_{s+2} \cos[2(n-n')t - 2\lambda - (s+2)\varpi] \\ + (2s-2) A_{2s-2} \cos[2(n-n')t - 2\lambda + (2s-2)\varpi] \\ + (2s+2) A_{2s+2} \cos[2(n-n')t - 2\lambda - (2s+2)\varpi] + \text{etc.} \ldots \end{array} \right\}$$

La loi que nous avons adoptée pour la profondeur du liquide, à la surface du cylindre (A), est telle, que pour tous les points de cette surface pour lesquels $s\varpi$ est un multiple pair de π, la profondeur est un minimum, et est égale à $\gamma_1(1 - 2k)$: tandis que pour tous les points pour lesquels $s\varpi$ est un multiple impair de π, cette profondeur est un maximum, et est égale à $\gamma_1(1 + 2k)$. Pour tous ces points de profondeur maximum ou minimum, le liquide atteint sa plus grande ou sa plus petite hauteur au moment où l'on a

$$(n - n')t - \lambda - \varpi = 0, \quad \text{ou} \quad = \pi,$$

c'est-à-dire au moment où le cylindre (B) traverse le méridien du lieu qu'on considère. Pour tous les autres points, l'instant de la plus grande ou de la plus petite hauteur du liquide sera généralement différent de celui du passage du cylindre (B) au méridien.

Nous remarquerons enfin que si l'on a $k = 0$, la valeur de y se confond avec celle que l'on a trouvée dans le cas d'une profondeur constante; car tous les coefficients A_{s-2}, A_{s+2}, A_{2s-2}, etc., s'annulent, et A_2 se réduit à $A_2^{(0)}$, en sorte qu'on a

$$y = \frac{2\gamma_1 L}{2^2 - i^2 - 2\alpha} \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi].$$

Troisième cas. *Liquide ne recouvrant pas tout le cylindre, et restant toujours compris entre deux plans méridiens, entre lesquels la profondeur γ est constante.*

16. Dans les deux cas précédents, nous avons pu déterminer complétement le mouvement du liquide sur le cylindre (A), en tenant compte de l'action du liquide sur lui-même; mais maintenant que nous

allons nous occuper de cas dans lesquels le liquide ne recouvre pas tout le cylindre, nous serons obligés, pour ne pas trop compliquer la question, de négliger cette action du liquide sur lui-même et de ne tenir compte que de l'action directe du cylindre (B) sur ce liquide. Il est aisé de voir que cela revient à négliger la quantité que nous avons désignée par α, dans les numéros précédents, c'est-à-dire le rapport de la densité du liquide à la densité moyenne du cylindre, et que le résultat sera d'autant plus exact que ce rapport sera plus petit. Nous supprimerons donc désormais dans les équations (13) et (14) les termes qui renferment V'_1 et V'_2.

Nous allons d'abord considérer le cas où le liquide reste toujours compris entre deux plans méridiens correspondant à $\varpi = \varpi_1$ et à $\varpi = -\varpi_1$, et où la profondeur du liquide, entre ces deux plans, est partout la même. Dans ce cas, les équations (13) donnent, pour déterminer v_1, l'équation

$$\frac{d^2 v_1}{d\varpi^2} + i^2 v_1 - \mathrm{L} \sin 2\varpi = 0;$$

et v_1 sera en outre assujetti à devenir nul pour $\varpi = \varpi_1$ et pour $\varpi = -\varpi_1$. L'intégrale complète de cette équation différentielle est

$$v_1 = \mathrm{A} \sin i\varpi + \mathrm{B} \cos i\varpi + \frac{\mathrm{L}}{i^2 - 4} \sin 2\varpi,$$

A et B étant les deux constantes arbitraires; et si l'on détermine ces constantes de manière à avoir $v_1 = 0$ pour $\varpi = \varpi_1$ et pour $\varpi = -\varpi_1$, on aura

$$v_1 = \frac{\mathrm{L}}{i^2 - 4} \left(\sin 2\varpi - \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \sin i\varpi \right).$$

On trouvera de même, au moyen des équations (14),

$$v_2 = \frac{\mathrm{L}}{i^2 - 4} \left(\frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \cos i\varpi - \cos 2\varpi \right).$$

On aura donc

$$v = \frac{\mathrm{L}}{i^2 - 4} \left\{ \begin{array}{l} \left(\sin 2\varpi - \dfrac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \sin i\varpi \right) \cos 2\left[(\mathrm{n} - \mathrm{n}')t - \lambda\right] \\ + \left(\dfrac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \cos i\varpi - \cos 2\varpi \right) \sin 2\left[(\mathrm{n} - \mathrm{n}')t - \lambda\right] \end{array} \right\},$$

et ensuite

$$y = -\frac{\gamma L}{i^2-4}\left\{\begin{array}{l}\left(2\cos 2\varpi - i\frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1}\cos i\varpi\right)\cos 2\left[(n-n')t-\lambda\right]\\ +\left(2\sin 2\varpi - i\frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1}\sin i\varpi\right)\sin 2\left[(n-n')t-\lambda\right]\end{array}\right\}.$$

Enfin, si l'on pose

$$N\cos(2\varpi+2\varepsilon) = \frac{\gamma L}{4-i^2}\left(2\cos 2\varpi - i\frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1}\cos i\varpi\right),$$

$$N\sin(2\varpi+2\varepsilon) = \frac{\gamma L}{4-i^2}\left(2\sin 2\varpi - i\frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1}\sin i\varpi\right),$$

on aura

$$y = N\cos 2\left[(n-n')t-\lambda-\varpi-\varepsilon\right].$$

et les quantités N et ε seront déterminées par les formules

$$N = \frac{\gamma L}{4-i^2}\sqrt{\left(2\cos 2\varpi - i\frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1}\cos i\varpi\right)^2 + \left(2\sin 2\varpi - i\frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1}\sin i\varpi_1\right)^2},$$

$$\operatorname{tang} 2\varepsilon = \frac{i\left[\sin(i+2)\varpi_1\sin(i-2)\varpi + \sin(i-2)\varpi_1\sin(i+2)\varpi\right]}{i\left[\sin(i+2)\varpi_1\cos(i-2)\varpi - \sin(i-2)\varpi_1\cos(i+2)\varpi\right] - 2\sin 2i\varpi_1}.$$

La valeur de y qu'on vient de trouver satisfait à la condition que la quantité du liquide reste constamment la même, condition qui s'exprime par l'équation

$$\int_{-\varpi_1}^{+\varpi_1} y\,d\varpi = 0;$$

en effet, l'on a

$$\int y\,d\varpi = -\gamma v,$$

quantité qui est nulle pour $\varpi = \varpi_1$ et pour $\varpi = -\varpi_1$.

L'angle ε, étant pris de manière que N soit positif, et étant réduit en temps, représente le retard du maximum de la hauteur du liquide sur le passage du cylindre (B) au méridien. Les deux valeurs de ε correspondant à $\varpi = \varpi_1$ et à $\varpi = -\varpi_1$, sont égales et de signes contraires : donc autant ce maximum de la hauteur du liquide retarde sur le pas-

sage du cylindre (B) au méridien, pour une de ces limites, autant il avance sur ce passage pour l'autre limite. La même chose a lieu pour deux points quelconques de la surface du cylindre (A), correspondant à des valeurs de ϖ égales et de signes contraires.

Pour comparer la hauteur maximum à laquelle le liquide s'élèvera dans ce cas, avec la hauteur maximum correspondant au premier cas, la profondeur γ restant la même, il suffira de déterminer le rapport de N au coefficient du cosinus dans la valeur de y du n° **15**, après avoir fait dans ce coefficient $\alpha = 0$, afin de partir des mêmes hypothèses; on trouvera ainsi pour ce rapport

$$\sqrt{\left(\cos 2\varpi - \frac{i}{2}\frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1}\cos i\varpi\right)^2 + \left(\sin 2\varpi - \frac{i}{2}\frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1}\sin i\varpi\right)^2}.$$

Quatrième cas. $\gamma = 2\gamma_1 \cos s\varpi$, *s étant quelconque.*

17. Nous supposons actuellement que la profondeur du liquide soit donnée par la formule

$$\gamma = 2\gamma_1 \cos s\varpi,$$

s étant quelconque, et qu'il n'y ait de liquide que pour les points pour lesquels ϖ est compris entre $-\frac{\pi}{2s}$ et $\frac{\pi}{2s}$.

Si l'on élimine y_1 entre les équations (13), qu'on multiplie par $2\cos s\varpi$, et qu'on pose

$$\gamma\rho_1 = \gamma_1\zeta_1,$$

on trouve l'équation

$$ga\gamma_1\frac{d^2\zeta_1}{d\varpi^2}\cdot 2\cos s\varpi + 4a^2(n - n')^2\zeta_1 - \frac{2ma^2}{q^2}\sin(s+2)\varpi$$
$$+ \frac{2ma^2}{q^2}\sin(s-2)\varpi = 0,$$

ou bien, en vertu des notations adoptées,

$$2\cos s\varpi\frac{d^2\zeta_1}{d\varpi^2} + i^2\zeta_1 + L\sin(s-2)\varpi - L\sin(s+2)\varpi = 0.$$

Pour satisfaire à cette équation, nous prendrons

$$\begin{aligned}\zeta_1 = A_2 \sin 2\varpi + A_{s-2} \sin(s-2)\varpi + A_{s+2} \sin(s+2)\varpi \\ + A_{2s-2} \sin(2s-2)\varpi + A_{2s+2} \sin(2s+2)\varpi + \ldots.\end{aligned}$$

En substituant et égalant à zéro les coefficients des divers sinus, nous obtiendrons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&i^2 A_2 + (s-2)^2 A_{s-2} - (s+2)^2 A_{s+2} = 0,\\
&2^2 A_2 + i^2 A_{s-2} - (2s-2)^2 A_{2s-2} + L = 0,\\
&2^2 A_2 - i^2 A_{s+2} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + L = 0,\\
&(s-2)^2 A_{s-2} - i^2 A_{2s-2} + (3s-2)^2 A_{3s-2} = 0,\\
&(s+2)^2 A_{s+2} - i^2 A_{2s+2} + (3s+2)^2 A_{3s+2} = 0,\\
&(2s-2)^2 A_{2s-2} - i^2 A_{3s-2} + (4s-2)^2 A_{4s-2} = 0,\\
&(2s+2)^2 A_{2s+2} - i^2 A_{3s+2} + (4s+2)^2 A_{4s+2} = 0,\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

La loi de ces relations est évidente, à partir de la quatrième.

On reconnaîtra facilement que si l'on opère de même sur les équations (14), et qu'on pose

$$\gamma v_2 = \gamma_1 \zeta_2,$$

on aura

$$\begin{aligned}\zeta_2 = - A_2 \cos 2\varpi + A_{s-2} \cos(s-2)\varpi - A_{s+2} \cos(s+2)\varpi \\ + A_{2s-2} \cos(2s-2)\varpi - A_{2s+2} \cos(2s+2)\varpi + \ldots,\end{aligned}$$

les coefficients étant les mêmes que précédemment.

Les relations qui ont été trouvées entre ces coefficients peuvent servir à les déterminer tous en fonction de deux d'entre eux qui resteront arbitraires : mais il existe des conditions auxquelles doivent satisfaire ζ_1 et ζ_2, et qui serviront à les déterminer. En effet, la profondeur γ du liquide étant nulle pour $\varpi = -\frac{\pi}{2s}$ et pour $\varpi = \frac{\pi}{2s}$, et les valeurs de v_1 et de v_2 ne devant jamais être infinies, il s'ensuit que ζ_1 et ζ_2 doivent également être nuls pour ces deux valeurs de ϖ; en remplaçant donc ϖ par $\frac{\pi}{2s}$, dans ζ_1 et ζ_2, et égalant à zéro, on

trouvera

$$\left.\begin{array}{l}\left[\begin{array}{r}A_2 - A_{2s+2} + A_{4s+2} - A_{6s+2} + \ldots \\ + A_{2s-2} - A_{4s-2} + A_{6s-2} - \ldots\end{array}\right] \sin\frac{\pi}{s} \\ + \left[\begin{array}{r}A_{s+2} - A_{3s+2} + A_{5s+2} - A_{7s+2} + \ldots \\ + A_{s-2} - A_{3s-2} + A_{5s-2} - A_{7s-2} + \ldots\end{array}\right] \cos\frac{\pi}{s}\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}-\left[\begin{array}{r}A_2 - A_{2s+2} + A_{4s+2} - A_{6s+2} + \ldots \\ + A_{2s-2} - A_{4s-2} + A_{6s-2} - \ldots\end{array}\right] \cos\frac{\pi}{s} \\ - \left[\begin{array}{r}A_{s+2} - A_{3s+2} + A_{5s+2} - A_{7s+2} + \ldots \\ + A_{s-2} - A_{3s-2} + A_{5s-2} - A_{7s-2} + \ldots\end{array}\right] \sin\frac{\pi}{s}\end{array}\right\} = 0.$$

En remplaçant ϖ par $-\frac{\pi}{2s}$, on trouverait les mêmes équations. Ces deux équations reviennent évidemment aux deux suivantes :

$$\left.\begin{array}{r}A_2 - A_{2s+2} + A_{4s+2} - A_{6s+2} + \ldots \\ + A_{2s-2} - A_{4s-2} + A_{6s-2} - \ldots\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r}A_{s+2} - A_{3s+2} + A_{5s+2} - A_{7s+2} + \ldots \\ + A_{s-2} - A_{3s-2} + A_{5s-2} - A_{7s-2} + \ldots\end{array}\right\} = 0,$$

qui serviront à trouver les valeurs des deux coefficients qui étaient restés indéterminés.

D'après les valeurs trouvées pour ζ_1 et ζ_2, on aura pour y_1 et y_2 les valeurs suivantes :

$$y_1 = -\gamma_1 \left[\begin{array}{l}2A_2\cos 2\varpi + (s-2)A_{s-2}\cos(s-2)\varpi + (s+2)A_{s+2}\cos(s+2)\varpi \\ + (2s-2)A_{2s-2}\cos(2s-2)\varpi + (2s+2)A_{2s+2}\cos(2s+2)\varpi + \ldots\end{array}\right],$$

$$y_2 = -\gamma_1 \left[\begin{array}{l}2A_2\sin 2\varpi - (s-2)A_{s-2}\sin(s-2)\varpi + (s+2)A_{s+2}\sin(s+2)\varpi \\ - (2s-2)A_{2s-2}\sin(2s-2)\varpi + (2s+2)A_{2s+2}\sin(2s+2)\varpi - \ldots\end{array}\right],$$

et par conséquent pour y, la valeur

$$y = -\gamma_1 \left\{\begin{array}{l}2A_2\cos 2[(n-n')t-\lambda-\varpi] + (s-2)A_{s-2}\cos 2\{[(n-n')t-\lambda-\varpi] + s\varpi\} \\ + (s+2)A_{s+2}\cos\{2[(n-n')t-\lambda-\varpi)] - s\varpi\} + (2s-2)A_{2s-2}\cos\{2[(n-n')t-\lambda-\varpi] + 2s\varpi\} \\ + (2s+2)A_{2s+2}\cos\{2[(n-n')t-\lambda-\varpi] - 2s\varpi\} + \ldots\end{array}\right\},$$

ou bien

$$y = N\cos 2[(n-n')t - \lambda - \varpi - \varepsilon],$$

les quantités N et ε étant déterminées par les formules

$$\tang 2\varepsilon = \frac{-(s-2)A_{s-2}\sin s\varpi + (s+2)A_{s+2}\sin s\varpi - (2s-2)A_{2s-2}\sin 2s\varpi + (2s+2)A_{2s+2}\sin 2s\varpi - \ldots}{2A_2 + (s-2)A_{s-2}\cos s\varpi + (s^2+2)A_{s+2}\cos s\varpi + (2s-2)A_{2s-2}\cos 2s\varpi + (2s+2)A_{2s+2}\cos 2s\varpi + \ldots},$$

$$N = \gamma_1 \sqrt{[-(s-2)A_{s-2}\sin s\varpi + (s+2)A_{s+2}\sin s\varpi - \ldots]^2 + [2A_2 + (s-2)A_{s-2}\cos s\varpi + (s+2)A_{s+2}\cos s\varpi + \ldots]^2}.$$

On verra, comme dans le numéro précédent, que cette valeur de y satisfait à la condition que la quantité de liquide reste constante.

On reconnaît encore ici que, pour des valeurs de ϖ égales et de signes contraires, ε prend aussi des valeurs égales et de signes contraires; en sorte que, autant le maximum de la hauteur du liquide retarde sur le passage du cylindre (B) au méridien en un point, autant ce maximum avance sur ce passage en un autre point symétrique du premier par rapport au plan méridien correspondant à $\varpi = 0$. Ce résultat s'applique aux deux limites du liquide, qui sont placées symétriquement par rapport à ce plan.

§ IV.

Considérations générales sur les marées de l'océan Atlantique.

18. C'est dans un Mémoire sur les marées du port de Londres, présenté à la Société royale de cette ville, en juin 1831, que M. Lubbock émet pour la première fois l'idée que la marée se propage du sud au nord dans l'océan Atlantique [*] : « En sorte que, ajoute-t-il, la pleine » mer arrive à peu près en même temps sur la côte de Portugal, et » sur la côte opposée d'Amérique, circonstance remarquable qui a été » signalée par Bacon. » Ce Mémoire ne renferme pas d'autres détails à ce sujet, si ce n'est une carte réduite sur laquelle sont marqués, sur les côtes orientales et occidentales de l'océan Atlantique, plusieurs points opposés où les marées ont lieu au même moment.

---

[*] It will be seen that the continents alter the direction of the *cotidal* lines (I mean the series of points at which it is high water at the same instant), and that the progress of the tide is not always from east to west : in the Atlantic it is from south to north; so that it is high water at nearly the same time on the coast of Portugal and on the opposite coaste of America. This remarkable circumstance is Noticed by Bacon. (*Transactions philosophiques* de 1831, page 382.)

En mai 1833, M. Whewell présenta à la même Société un Mémoire intitulé : *Essai d'une première approximation d'une carte de lignes cotidales* (il entend par ligne cotidale la suite des points dans lesquels la pleine mer arrive au même moment). Dans ce Mémoire, l'auteur s'appuie sur tous les renseignements recueillis par les navigateurs et qui ont pu parvenir à sa connaissance, pour tracer dans toutes les mers les lignes cotidales, lignes qui indiquent, comme on le concevra aisément, les positions successives du flot-marée (*tide-wave*). Pour l'océan Atlantique en particulier, il trouve, en réduisant les heures des pleines mers dans différents lieux en temps de Greenwich, que ces heures vont constamment en retardant sur la côte est de cet océan, depuis le cap de Bonne-Espérance jusque vers les îles Britanniques; et il en conclut que le flot-marée marche du sud au nord, comme l'indique du reste très-clairement la carte générale qui est annexée à son Mémoire, et sur laquelle les lignes cotidales de l'océan Atlantique sont des lignes convexes vers le nord, et ayant leurs extrémités sur des points des deux côtes à peu près opposés.

Dans un nouveau Mémoire sur les marées du port de Londres, présenté en 1836, M. Lubbock suppose que ces marées suivent les mêmes lois qu'au cap de Bonne-Espérance, si ce n'est qu'elles sont en retard de trente-six heures sur celles de ce cap; parce qu'il admet, comme précédemment, que le flot-marée se propage dans l'océan Atlantique du sud au nord, qu'il tourne autour des îles Britanniques, pour arriver jusqu'à Londres, et que, pour faire ce trajet, il met trente-six heures, dont douze pour aller du cap de Bonne-Espérance à Gibraltar, douze de Gibraltar à Édimbourg, et douze d'Édimbourg à Londres. Il ajoute qu'il a reconnu que le retard des marées à Brest est beaucoup plus petit qu'à Londres, et qu'il n'y a pas de doute qu'il ne soit moindre au cap de Bonne-Espérance qu'à Brest.

Il est évident d'après cela que, pour MM. Lubbock et Whewell, les marées de Brest, et celles de toute la partie nord de l'océan Atlantique ne sont, du moins en grande partie, que des marées dérivées, et qu'elles sont le résultat des oscillations que la Lune et le Soleil produisent dans la mer du Sud.

19. Voyons d'abord si les faits sur lesquels repose l'idée admise par

les deux savants anglais ne pourraient pas s'accorder avec l'idée contraire, qui consisterait à regarder les marées des côtes d'Europe, sur l'océan Atlantique, comme produites en grande partie par l'action directe de la Lune et du Soleil. Imaginons pour cela que les marées de la mer du Sud produisent, comme ils le supposent, des ondulations qui se propagent du sud au nord, dans l'océan Atlantique, et qu'en même temps les actions de la Lune et du Soleil donnent lieu, quelque part dans cet océan, à des marées directes, dont les heures sur les côtes s'accordent à peu près avec celles du flot venant de la mer du Sud; ces marées directes ne feront qu'augmenter la hauteur des marées observées sur ces côtes, et les heures resteront toujours à peu près les mêmes que si elles n'existaient pas. Si donc on se contente de considérer les heures des marées aux différents points des côtes, il semblera toujours que les marées ne sont que le résultat de celles qui se produisent dans la mer du Sud, et que les actions directes du Soleil et de la Lune n'y entrent pour rien. Eh bien, j'ai de fortes raisons de croire que ce cas hypothétique se trouve réalisé dans la nature.

Si nous considérons, en effet, la figure de l'océan Atlantique, nous remarquerons qu'en allant du sud au nord, après un resserrement assez considérable vers l'équateur, entre l'Afrique et l'Amérique du Sud, il s'élargit et forme un immense bassin dont la plus grande largeur en longitude est d'environ 70 degrés, et correspond à peu près au parallèle du trentième degré de latitude nord; sur les côtes d'Afrique et d'Europe qui sont voisines de cette plus grande largeur, l'établissement varie de onze heures à trois heures, en marchant du sud au nord, et par conséquent pourrait assez bien convenir à des marées qui seraient produites directement dans ce bassin. On voit donc, d'après cela, que les heures des marées recueillies par les navigateurs sur les divers points des côtes occidentales d'Afrique et d'Europe ne peuvent pas suffire pour démontrer que les marées que nous observons soient presque exclusivement produites par celles de la mer du Sud, puisque ces heures s'accordent avec l'hypothèse où des marées directes, même très-considérables, se produisent vers le trentième degré de latitude nord.

MM. Lubbock et Whewell s'appuient encore sur un autre fait : c'est que la pleine mer arrive à peu près au même instant dans des points des deux côtes de l'Océan ayant même latitude. Mais ce fait n'est nullement

contraire à notre hypothèse; car, lorsque des marées se produisent directement dans une mer limitée, il peut très-bien se faire que la pleine mer arrive en même temps, ou à peu près, sur les deux côtes opposées. Ensuite les heures de la pleine mer sur les côtes des États-Unis éprouvent probablement des retards en raison du peu de profondeur que la mer doit présenter jusqu'à une certaine distance des côtes dans ces contrées, et ces heures ne doivent pas, par conséquent, être considérées comme pouvant conduire à des résultats bien concluants.

20. Maintenant que nous avons reconnu que rien, dans les faits cités, ne s'oppose à ce qu'on regarde les marées de la partie nord de l'océan Atlantique comme étant en grande partie des marées directes, nous allons chercher à donner diverses preuves qui contribueront à confirmer l'exactitude de cette hypothèse.

La première et la meilleure consistera dans la considération des hauteurs des marées, dont les savants anglais ne se sont pas occupés. Ces hauteurs ne sont pas connues d'une manière bien précise, quoique cependant leur détermination soit sujette à moins d'incertitude que celle de l'établissement; mais les renseignements donnés par les navigateurs sur ces hauteurs seront bien suffisants pour l'objet que nous nous proposons ici.

Pour la côte occidentale d'Afrique, j'ai consulté le Tableau général des vents, des courants et des marées, par Ch. Romme; la description des côtes d'Afrique, par Owen; le Mémoire de M. Roussin sur la navigation aux côtes occidentales d'Afrique, et les Cartes qui composent l'*Hydrographie française*. J'ai pu former ainsi le Tableau suivant, qui donne les hauteurs des marées en pieds, avec l'indication des sources où je les ai puisées.

Cap de Bonne-Espérance. . . .	$3^{pi.}$	Romme.
	$5^{pi.}$	Owen.
Simon's-Bay.	3^{pi}	Romme.
Ile Sainte-Hélène.	$2^{pi.}$ $9^{po.}$	Romme.
Saint-Paul de Loando	$5^{pi.}$	Owen.
Baie de Corisco.	$7^{pi.}$	Owen.
Entrée de la rivière de Benin. .	$8^{pi.}$	Owen.

Rivière Sierra-Leone.	10pi.	Romme.
	12pi. 6po.	Owen.
Iles de Loss..	12 à 15pi.	Romme.
	13pi.	Owen.
Archipel des Bissagos, entrée du grand canal.	8pi.	Roussin.
Archipel des Bissagos, canal oriental.	12 à 15pi.	Roussin.
Ile Gorée.	2 à 3pi.	Romme.
	2pi. 6po.	*Hydr. franç.* (Roussin)
Ile Saint-Nicolas (cap Vert). . .	5 à 6pi.	Romme.
Cap Blanc.	10pi. dans les syzygies. . .	*Hydrographie française.*
Sainte-Croix de Ténériffe. . .	12pi. dans les syzygies. . . / 6pi. dans les quadratures.	*Hydrographie française.*

La plupart de ces hauteurs sont données sans indication des époques auxquelles elles correspondent, en sorte qu'il est possible que plusieurs d'entre elles se rapportent aux syzygies On peut expliquer ainsi la différence des hauteurs données par Romme et par Owen pour le cap de Bonne-Espérance, différence qui est presque égale à la plus petite des deux hauteurs. Cependant, quoique les marées soient généralement très-petites aux environs du cap de Bonne-Espérance, elles pourraient bien avoir au cap même une hauteur moyenne de 5 pieds, à cause de la position qu'il occupe, à l'extrémité d'un continent qui est disposé de manière à s'opposer à la marche du flot-marée de l'est à l'ouest.

La petitesse des marées à l'île Sainte-Hélène est confirmée par des observations dont parle M. Whewell, dans son Mémoire de 1833. D'après ces observations, la plus grande marée dans cette île est de 3 pieds.

A l'inspection du tableau précédent, on voit que la marée, faible d'abord au cap et à Sainte-Hélène, augmente sur les côtes de Guinée, et devient assez considérable à l'entrée de la rivière Sierra-Léone, et dans les îles de Loss et des Bissagos; puis elle redevient faible à l'île Gorée, où elle n'est plus que de 2 $\frac{1}{2}$ pieds; enfin, à partir de là, elle augmente jusque vers les côtes d'Europe.

Quant aux hauteurs des marées sur les côtes d'Europe, je me contenterai de prendre les résultats des observations faites simultanément en divers lieux, en juin 1835, et rapportées par M. Whewell, dans un Mémoire présenté à la Société royale de Londres en 1836 [*]. D'après ces observations, la hauteur moyenne de la marée est

A Cadix.	d'environ	$8^{pi.}$,
Sur la côte de Portugal		$7^{pi.}\frac{1}{2}$,
Pointe nord-ouest de l'Espagne.		$9^{pi.}\frac{1}{2}$,
A Brest.		$14^{pi.}$.

On voit par là que les marées conservent sur les côtes d'Espagne et de Portugal, à peu près la grandeur qu'elles avaient vers le nord de l'Afrique, et qu'elles sont encore plus considérables à Brest.

Si nous cherchons maintenant à nous rendre compte de ce qui devrait arriver si les marées de l'océan Atlantique n'étaient que des marées dérivées provenant de celles de la mer du Sud, nous reconnaîtrons que le flot-marée, en s'avançant vers le nord, rencontrerait bientôt la côte de Guinée qui s'opposerait à sa marche, comme une barrière, et que, par conséquent, les marées deviendraient plus grandes sur cette côte; mais qu'après avoir traversé l'espèce de détroit que présente l'Océan, le flot diminuerait en se répandant dans une mer plus vaste, et que les marées redeviendraient au moins aussi faibles qu'au point de départ de ce flot. Les résistances de tout genre, auxquelles la mer est soumise dans ses mouvements, contribueraient encore à faire diminuer la grandeur de ces marées. Les résultats des observations des navigateurs s'accordent assez bien avec cette marche du flot-marée, depuis le cap de Bonne-Espérance, jusque vers le cap Vert; mais, à partir de là, jusqu'aux îles Britanniques, la grandeur des marées est beaucoup plus considérable qu'elle ne devrait l'être dans cette hypothèse; et on ne peut pas dire que cela tient à des circonstances locales, puisque toutes les observations, faites en un grand nombre de lieux très-différents, conduisent au même résultat.

21. Dans la crainte qu'il ne reste des doutes sur la petitesse du flot-

---

[*] *Transactions philosophiques* de 1836, IIe partie, page 327.

marée dans la mer du Sud, petitesse qui sert de fondement à nos raisonnements, et qui n'a été constatée, dans le numéro précédent, qu'en un très-petit nombre de points, je considérerai aussi les hauteurs des marées sur les côtes de l'Amérique méridionale. Les marées devant se produire, dans la mer du Sud, à peu près comme elles le feraient dans une mer libre de toutes parts, le flot-marée doit marcher de l'est à l'ouest, et par conséquent venir s'arrêter sur les côtes de l'Amérique, où les eaux doivent s'élever plus qu'en pleine mer. Voyons maintenant ce qu'indiquent les observations.

Pendant le séjour de *l'Émulation* (voyage de M. Duperré) sur la rade de Montevideo, en janvier 1831, la plus grande marée observée a été de $2^{pi.}$ $5^{po.}$; et, ce qui est assez singulier, le 15 janvier, lendemain de la nouvelle lune, le niveau de la mer n'a varié que de 7 pouces, depuis 7 heures du matin jusqu'à 5 heures du soir. La latitude de Montevideo est à peu près la même que celle du cap de Bonne-Espérance.

Suivant le *Pilote du Brésil* de M. Roussin, la hauteur de la marée est d'environ $2^{pi.}$ $\frac{1}{2}$ à l'île Sainte-Catherine et à Rio-Janeiro; d'environ 4 pieds à l'entrée de la baie du Saint-Esprit; et au plus de 5 pieds, à l'époque des syzygies, dans les îles des Abrolhos.

Il résulte évidemment de ces nombres que les marées de la mer du Sud sont extrêmement faibles et insuffisantes pour être en grande partie la cause des marées des côtes de l'Europe.

Si nous continuons à marcher vers le nord, sur la côte d'Amérique, nous trouvons, toujours d'après le *Pilote du Brésil,* que la marée est d'environ 5 pieds dans la Baie de Tous-les-Saints; qu'elle est de $7^{pi.}$ $\frac{1}{2}$ dans le port de Fernambouc; de 10 à 12 pieds dans l'île isolée Fernando de Noronha; de 11 à 12 pieds dans la baie de Ciara, à l'époque des syzygies; et enfin, d'environ 8 pieds à Cayenne.

Cette augmentation de la hauteur de la marée vers le nord de la côte du Brésil s'accorde assez bien, ainsi que celle qui a été observée sur la côte de Guinée, avec l'hypothèse de MM. Lubbock et Whewell sur la marche du flot-marée du sud au nord; puisque, vers le rétrécissement que présente l'Océan, ce flot doit devenir plus considérable : mais elle pourrait bien tenir aussi en partie aux marées produites directement dans ces régions équatoriales. C'est ce dont nous ne nous oc-

cuperons pas davantage, notre objet principal étant uniquement de démontrer que les marées de Brest sont en grande partie dues à l'action directe de la Lune et du Soleil sur la partie nord de l'océan Atlantique.

22. Après avoir considéré les hauteurs des marées, nous allons nous occuper de leur régularité, ce qui nous fournira de nouvelles preuves de ce que nous avançons.

Tous les navigateurs s'accordent à dire que les marées de la mer du Sud sont très-irrégulières. Ainsi M. Whewell parle, dans son Mémoire de 1833, d'observations faites à Sainte-Hélène par Maskelyne en 1761, et par le lieutenant Johnson en 1826, observations dont nous avons déjà fait mention plus haut, et d'après lesquelles les marées de Sainte-Hélène sont très-irrégulières.

En 1818, M. de Freycinet fit faire des observations de marées très-précises à Rio-Janeiro, depuis le 8 janvier jusqu'au 24 du même mois. La hauteur de la mer était déterminée de dix minutes en dix minutes, au moyen d'un flotteur, et cela jour et nuit. Eh bien, les résultats de ces observations présentent beaucoup d'irrégularités. Si l'on se contente de prendre les heures des pleines mers et celles des basses mers, on trouve, par exemple, les résultats suivants :

Le 9,	basse mer à	$11^h 31^m$	matin,
Id.,	basse mer à	$11^h 40^m$	soir,
10,	basse mer à	$10^h 35^m$	matin,
Id.,	basse mer à	$11^h 40^m$	soir,
11,	basse mer à	$10^h 30^m$	matin,
12,	basse mer à	$0^h 30^m$	matin,
Id.,	basse mer à	$10^h 20^m$	matin,
13,	basse mer à	$1^h 50^m$	matin,
Id.,	basse mer à	$11^h 10^m$	matin,
14,	basse mer à	$1^h 15^m$	matin,
Id.,	basse mer à	$11^h 0^m$	matin,
15,	basse mer à	$4^h 20^m$	matin,
Id.,	basse mer à	$4^h 0^m$	soir.

Le 19,	pleine mer à	$1^h 43^m$	matin,
Id.,	pleine mer à	$1^h 15^m$	soir,
20,	pleine mer à	$2^h 52^m$	matin,
Id.,	pleine mer à	$1^h 25^m$	soir,
21,	pleine mer à	$3^h 5^m$	matin,
Id.,	pleine mer à	$1^h 55^m$	soir,
22,	pleine mer à	$3^h 45^m$	matin.

Ainsi l'heure de la basse mer, au lieu de retarder à peu près uniformément d'un jour au suivant, avait avancé, pour l'une des deux basses mers de chaque jour, depuis le 9 jusqu'au 12; le 14, cette basse mer était arrivée encore 31 minutes plus tôt que le 9; puis, tout à coup, du 14 au 15, elle avait retardé de 5 heures. Quant aux pleines mers, on voit que, du 19 au 22, l'une des deux a retardé beaucoup moins vite que l'autre.

Je trouve également dans la relation du voyage de Bougainville, en 1826, à l'occasion de son séjour à Rio-Janeiro, du 3 mars au 10 avril suivant : « Les marées n'ont pas eu la moindre régularité au » mouillage devant la ville, et il est impossible de leur assigner ni » époque, ni durée même approchée. Le jusant s'est prolongé presque » toujours bien au delà du flot, et sa vitesse aussi a été plus grande, » quoiqu'elle n'ait jamais excédé un nœud. La seule chose constante, » c'est que le flot porte au nord, et le jusant au sud. Parmi les circon- » stances variées qu'ont présentées les irrégularités des marées, il en » est deux qui sont particulièrement remarquables, et qui ont eu lieu » à des phases semblables de la Lune : lors du premier quartier, la » mer a été étale pendant vingt et une heures, et il n'y a point eu de » flot; au dernier quartier, le jusant a duré vingt-trois heures, et il » n'y a pas eu de flot. »

D'après le *Pilote du Brésil*, les marées sont très-irrégulières dans le canal des Abrolhos.

Toutes ces irrégularités tiennent sans doute à des circonstances locales, telles que les vents, les courants, etc.; mais si ces causes affectent d'une manière aussi notable le phénomène des marées dans la mer du Sud, ne devrait-il pas en résulter de semblables irrégularités dans les marées de nos ports, si elles n'étaient en grande partie produites

que par celles de cette mer? Or il suffit de jeter un coup d'œil sur les observations de marées de Brest, pour se convaincre que ces marées sont très-régulières.

M. Whewell lui-même, dans son Mémoire sur les marées des côtes d'Europe et d'Amérique, en 1835, cite un fait qui lui semble jeter du doute sur la marche du flot-marée du sud au nord : ce fait consiste en ce que l'inégalité diurne ne se présente pas de la même manière, dans les observations faites, en même temps, au cap de Bonne-Espérance, et sur les côtes d'Espagne et de Portugal [*].

25. Voyons enfin si les dimensions de l'océan Atlantique permettent de supposer que les marées qui s'y produisent directement soient plus fortes que celles de la mer du Sud.

Nous avons déterminé, dans le n° **16**, le mouvement d'un liquide sur un cylindre, en supposant que ce liquide soit renfermé entre deux plans diamétraux faisant entre eux un angle égal à $2\varpi_1$, et que sa profondeur soit constante entre ces deux plans; et nous avons trouvé que le rapport de la hauteur de la marée produite dans ce liquide à celle qui serait produite si, la profondeur restant la même, le liquide recouvrait tout le cylindre, a pour expression

$$\sqrt{\left(\cos 2\varpi - \frac{i}{2}\frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1}\cos i\varpi\right)^2 + \left(\sin 2\varpi - \frac{i}{2}\frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1}\sin i\varpi\right)^2}.$$

Si l'on y suppose $\varpi = \varpi_1$, afin de ne considérer que les marées qui ont lieu sur les bords de ce liquide, ce rapport prendra la forme

$$\sqrt{1 + \frac{i^2}{4}(\sin^2 2\varpi_1 \cot^2 i\varpi_1 + \cos^2 2\varpi_1 \tang^2 i\varpi_1) - i\sin 2\varpi_1 \cos 2\varpi_1 (\cot i\varpi_1 + \tang i\varpi_1)}.$$

Supposons maintenant que ϖ_1 soit au plus égal à 30 degrés, c'est-à-dire que la largeur du liquide que nous considérons soit, par rapport à la circonférence du cylindre, plus petite que la largeur de la partie nord

[*] I may add, that the notion of the progress of the tide-wave from south to north in the Atlantic is still further involved in difficulties by its appearing that at the cape of Good hope the diurnal inequality showed itself most clearly on the 17th, 18th, and 19th of june; that is, as late as Inspain and Portugal. (*Transactions Philosophiques* de 1836, 2me partie, p. 304.)

de l'océan Atlantique relativement à la circonférence du parallèle de la Terre qui lui correspond; $\sin 2\varpi_1$ et $\cos 2\varpi_1$ seront tous deux positifs, et il est clair que l'expression précédente sera généralement plus grande que l'unité, puisqu'il suffira pour cela qu'on ait

$$\frac{i^2}{4}(\sin^2 2\varpi_1 \cot^2 i\varpi_1 + \cos^2 2\varpi_1 \operatorname{tang}^2 i\varpi_1)$$
$$- i \sin 2\varpi_1 \cos 2\varpi_1 (\cot i\varpi_1 + \operatorname{tang} i\varpi_1) > 0,$$

condition qui sera déjà remplie par toutes les valeurs de i qui rendront $\operatorname{tang} i\varpi_1$ négatif. Il est vrai que, si ϖ_1 est très-petit, i devra être très-grand, et par conséquent la profondeur γ du liquide très-petite, puisqu'on a

$$i^2 = \frac{4a(\mathrm{n} - \mathrm{n}')^2}{g\gamma};$$

mais si ϖ_1 n'est pas très-petit, l'inégalité précédente sera satisfaite pour un grand nombre de valeurs de γ qui donnent au liquide une profondeur comparable à celle de la mer. Faisons, par exemple, $\varpi_1 = 30$ degrés, et $i = \frac{9}{2}$, et nous trouverons que le rapport des marées du liquide limité et du liquide entièrement libre devient à peu près égal à 3. Or, cette valeur de i est celle qui conviendrait au cas où les dimensions transversales du cylindre seraient égales à celles de l'équateur terrestre, où g serait la pesanteur sur la Terre, n sa vitesse angulaire, n' la vitesse angulaire de la Lune dans son orbite, et où la profondeur du liquide serait d'environ 4000 mètres.

Il n'est pas nécessaire d'insister davantage sur cette application de nos formules, pour qu'on admette que, malgré la grande différence entre le cas auquel elles se rapportent et le cas de la nature, elles montrent néanmoins que les marées produites directement dans le nord de l'océan Atlantique peuvent être beaucoup plus considérables que celles qui se produiraient dans une mer libre, de même profondeur, et située à la même latitude, et par conséquent aussi plus considérables que les marées de la mer du Sud.

24. En résumant ce qui vient d'être dit dans ce paragraphe, nous voyons que :

1°. Les faits sur lesquels repose l'idée adoptée par MM. Lubbock et

Whewell, que les marées de la partie nord de l'océan Atlantique ne sont en grande partie que des marées dérivées, ne sont pas contraires à l'hypothèse d'après laquelle ces marées seraient presque entièrement dues à l'action directe de la Lune et du Soleil;

2°. Les hauteurs des marées observées sur les côtes d'Europe sont trop considérables pour qu'on puisse les regarder comme étant le résultat des marées de la mer du Sud, puisque, d'après toutes les observations connues, ces dernières sont très-faibles;

3°. L'irrégularité qu'on observe généralement dans les marées de la mer du Sud ne s'accorde pas avec la régularité des marées de Brest;

4°. Enfin, les recherches analytiques contenues dans le troisième paragraphe de ce Mémoire montrent qu'on est en droit de supposer que les marées produites directement dans la partie nord de l'océan Atlantique sont plus fortes que celles qui se produisent dans la mer du Sud.

Il me semble impossible, d'après cela, de ne pas admettre, sinon comme certain, au moins comme extrêmement probable, que les marées des côtes d'Europe sur l'océan Atlantique sont presque entièrement dues à l'action directe de la Lune et du Soleil sur la partie nord de cet océan.

MÉMOIRE

SUR

LES ONDES SUCCESSIVES,

PAR M. P.-H. BLANCHET,
Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV.

1. Pendant longtemps dans la théorie mathématique de la propagation des ondes par les milieux élastiques, les géomètres n'ont considéré, en général, que les ondes dues à un ébranlement central instantané. Je me propose ici de rechercher les lois de la propagation des ondes successives produites par une cause centrale incessamment agissante. M. Duhamel a donné une méthode générale pour passer du cas de déplacements déterminés et fixes au cas de déplacements fonctions du temps [*]. Mais il n'en a pas déduit les lois générales de propagation, qui font l'objet de ce Mémoire; et d'ailleurs j'ai employé une méthode différente.

Pour parvenir à la solution de la question, je suppose que les points du milieu, soumis à leurs actions moléculaires mutuelles, sont sollicités en outre par une force accélératrice. Les équations du probleme sont celles de mon premier Mémoire [**], augmentées chacune d'un terme fonction des coordonnées et du temps. M. Cauchy a donné les intégrales des équations de ce genre sous forme d'intégrales définies multiples [***]. Je parviens à réduire ces intégrales par une méthode

[*] Voyez le XXIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 1.

[**] Voyez *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, tome V page 1.

[***] Voyez *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, par M. A. Cauchy, page 89.

analogue à celle que j'ai donnée précédemment. C'est l'interprétation des intégrales réduites qui me donne les lois de cet autre mouvement.

2. Dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, les équations générales du mouvement d'une molécule peuvent être présentées symboliquement sous la forme abrégée suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} (\mathcal{L}_1 - s^2)\xi + \mathcal{R}_2\eta + \mathcal{Q}_3\zeta = f_1(x, y, z, t), \\ \mathcal{R}_1\xi + (\mathcal{M}_2 - s^2)\eta + \mathcal{P}_3\zeta = f_2(x, y, z, t), \\ \mathcal{Q}_1\xi + \mathcal{P}_2\eta + (\mathcal{N}_3 - s^2)\zeta = f_3(x, y, z, t); \end{cases}$$

$f_1(x, y, z, t)$, $f_2(x, y, z, t)$, $f_3(x, y, z, t)$ sont les composantes de la force accélératrice parallèlement aux axes des cordonnées. $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, sont des polynômes homogènes du second degré par rapport à trois quantités u, v, w. Les exposants de ces quantités et de s correspondent respectivement à des différentiations effectuées par rapport à x, y, z, t sur les inconnues ξ, η, ζ, fonctions de ces quatre dernières variables.

D'après les formules données par M. Cauchy, dans les deuxième et troisième livraisons de ses *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, on aura les intégrales générales des équations (1) en prenant

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(S)_s}
\left\{\begin{array}{r}
s\,[L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu) + R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu) + Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\
-\sqrt{-1}\,[L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu) + R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu) + Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\
-\sqrt{-1}\int_0^t e^{-s\tau\sqrt{-1}}\,[L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau) + R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau) + Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)]\,d\tau
\end{array}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \\
\eta &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(S)_s}
\left\{\begin{array}{r}
s\,[R_2 f_1(\lambda,\mu,\nu) + M_2 f_2(\lambda,\mu,\nu) + P_2 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\
-\sqrt{-1}\,[R_2 f_1(\lambda,\mu,\nu) + M_2 f_2(\lambda,\mu,\nu) + P_2 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\
-\sqrt{-1}\int_0^t e^{-s\tau\sqrt{-1}}\,[R_2 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau) + M_2 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau) + P_2 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)]\,d\tau
\end{array}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \\
\zeta &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(S)_s}
\left\{\begin{array}{r}
s\,[Q_3 f_1(\lambda,\mu,\nu) + P_3 f_2(\lambda,\mu,\nu) + N_3 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\
-\sqrt{-1}\,[Q_3 f_1(\lambda,\mu,\nu) + P_3 f_2(\lambda,\mu,\nu) + N_3 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\
-\sqrt{-1}\int_0^t e^{-s\tau\sqrt{-1}}\,[Q_3 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau) + P_3 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau) + N_3 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)]\,d\tau
\end{array}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\qquad S = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{M}_2 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3(\mathfrak{L}_1 - s^2) - \mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{R}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_3\mathfrak{R}_1;
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
L_1 = (\mathfrak{M}_2 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3, & R_1 = -\mathfrak{R}_2(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_3, & Q_1 = -\mathfrak{Q}_3(\mathfrak{M}_2 - s^2) + \mathfrak{R}_2\mathfrak{P}_3, \\
R_2 = -\mathfrak{R}_1(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_1, & M_2 = (\mathfrak{N}_3 - s^2)(\mathfrak{L}_1 - s^2) - \mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_1, & P_2 = -\mathfrak{P}_3(\mathfrak{L}_1 - s^2) + \mathfrak{Q}_3\mathfrak{R}_1, \\
Q_3 = -\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{M}_2 - s^2) + \mathfrak{R}_1\mathfrak{P}_2, & P_3 = -\mathfrak{P}_2(\mathfrak{L}_1 - s^2) + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_2, & N_3 = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2.
\end{array}
\right.
$$

3. Ces valeurs de ξ, η, ζ satisfont aux équations (1). En effet, si on les substitue, les parties indépendantes de l'intégration relative à τ se détruisent dans les premiers membres des équations; on le verra comme dans le troisième Mémoire. Les parties dépendantes de cette intégration jouissent de la même propriété, abstraction faite de la variabilité de la limite supérieure de l'intégrale $\int_0^t$, quand on différentie par rapport à t. Mais si l'on a égard à cette variabilité, les valeurs de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ reproduisent les seconds membres. Dans la valeur de $\frac{d\xi}{dt}$, par exemple, on trouvera

$$\frac{-1}{8\pi}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\int_0^t \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+s(t-\tau)]\sqrt{-1}}}{(S)_s}\, s\begin{bmatrix} L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau) \\ + R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau) \\ + Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)\end{bmatrix} d\tau\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$+\frac{\sqrt{-1}}{8\pi^2}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}}{(S)_s}\begin{bmatrix} L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,t) \\ + R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,t) \\ + Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,t)\end{bmatrix} d\tau\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Si l'on passe à la valeur de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, la seconde de ces intégrales ne changera pas d'aspect. f_1, f_2, f_3 seront remplacés par $\frac{df_1}{dt}$, $\frac{df_2}{dt}$, $\frac{df_3}{dt}$, et comme on a

$$\mathcal{E}\frac{L_1}{(S)_s} = 0, \quad \mathcal{E}\frac{R_1}{(S)_s} = 0, \quad \mathcal{E}\frac{Q_1}{(S)_s} = 0,$$

elle s'évanouira d'elle-même. La première donnera deux termes : l'un, dépendant de $\int_0^t$, contribuera à l'évanouissement du premier membre de la première des équations (1); l'autre sera

$$\frac{-1}{8\pi^2}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}}{(S)_s}\, s\begin{bmatrix} L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,t) \\ + R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,t) \\ + Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,t)\end{bmatrix} du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu;$$

et comme on a

$$\mathcal{E}\frac{-sL_1}{(S)_s} = 1, \quad \mathcal{E}\frac{-sR_1}{(S)_s} = 0, \quad \mathcal{E}\frac{-sQ_1}{(S)_s} = 0,$$

il se réduira à l'intégrale sextuple

$$\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\, f_1(\lambda, \mu, \nu, t)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

qui, d'après la formule de Fourier étendue à trois variables, représente $f_1(x, y, z, t)$, c'est-à-dire le deuxième membre de la première des équations (1). Cette équation sera donc satisfaite. Il en sera de même des deux autres.

4. Pour $t = 0$, les parties dépendantes de $\int_0^t$ disparaissent, et, comme dans le troisième Mémoire [*], les valeurs de ξ, η, ζ se réduisent à $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$, c'est-à-dire aux valeurs initiales : dans les expressions de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, les parties dépendantes de $\int_0^t$ s'évanouissent aussi, et l'on retrouve les valeurs initiales $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$.

5. Je ne m'arrêterai pas à la réduction des parties des intégrales (2) indépendantes de $\int_0^t$. Elle a été faite ailleurs et conduirait à des conséquences générales que j'ai déjà fait connaître [**].

6. Les parties dépendantes de l'intégration par rapport à τ peuvent être mises sous la forme

$$(5)\quad \frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-s(t-\tau)\sqrt{-1}}}{(S)_s}\,\omega f(\lambda, \mu, \nu, \tau)\, d\tau\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu;$$

ω est une fonction homogène entière du quatrième degré.

En transformant sous le signe $\mathcal{E}$, comme au n° 4 du troisième Mé-

---

[*] Voyez *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome VII, page 13.

[**] *Idem*, tomes V et VII.

moire [*], on aura d'abord

$$(6)\quad \frac{\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathcal{E}\frac{e^{[\rho u - s(t-\tau)]\sqrt{-1}}.\alpha}{(S)_s}\chi(\rho,\tau)\,d\tau\,du\,dv\,dw\,\rho^2\,d\rho\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

$$(7)\qquad \chi(\rho,\tau) = f(x-\alpha\rho,\ y-\beta\rho,\ z-\gamma\rho,\ \tau),$$

puis ensuite

$$(8)\quad \frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathcal{E}\frac{e^{u[\rho-n(t-\tau)]\sqrt{-1}}.m}{(T)_n}\chi(\rho,\tau)\,u\rho^2\,d\tau\,du\,dp\,dq\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

en ayant égard au changement de variable sous le signe $\mathcal{E}$.

Cette intégrale peut être remplacée par

$$(9)\quad \frac{}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{d.}{dt}\,\mathcal{E}\frac{e^{u[\rho-n(t-\tau)]\sqrt{-1}}.m}{(T)_n}\chi(\rho,\tau)\frac{\rho^2}{n}\,d\tau\,du\,dp\,dq\,d\rho\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

On peut faire les intégrations relatives à u et ρ par la formule de Fourier, et l'on trouve

$$(10)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{d.}{dt}\,\mathcal{E}\frac{2nm}{(T)_n}\chi[n(t-\tau),\tau](t-\tau)^2\,d\tau\,dp\,dq\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

A cause des limites o et $+\infty$ de ρ, le résidu intégral sera borné aux valeurs positives de n.

En reprenant maintenant

$$v = p(t-\tau),\quad w = q(t-\tau),\quad s = n(t-\tau),$$

on trouvera

$$(11)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{2s\omega}{(S)_s}\chi(s,\tau)\,dv\,dw\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau,$$

résultat analogue à la formule (14) du Mémoire cité. On ne devra prendre dans les résidus que les valeurs positives de s tirées de l'équation $S = 0$.

Remarquons que S est devenu une fonction homogène du sixième

---

[*] Voyez *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome V, page 15.

degré de v, w, $t-\tau$; ω est une fonction homogène du quatrième degré des mêmes quantités [*].

7. Cela posé, l'une quelconque s des racines positives de l'équation $S = 0$ donnera parmi les résidus partiels un terme de la forme

$$(12)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2s\omega}{S'_s}\,\chi(s,\tau)\,dv\,dw\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta\,d\tau.$$

On peut appliquer à cette intégrale les raisonnements qui ont servi à transformer l'intégrale (57) du premier Mémoire. On posera

$$(13)\qquad \varphi(t-\tau,s)=\int\frac{-2s\omega}{S'}\,\delta\frac{d\sigma}{ds},$$

en attribuant le même sens aux notations. Rien n'empêchera d'arriver à la formule

$$(14)\qquad \frac{-1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N(t-\tau)}^{\infty}\varphi(t-\tau,s)\,\chi(s,\tau)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta\,d\tau.$$

8. Dans les composantes $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ de la vitesse, on aura des intégrales de la forme

$$(15)\qquad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N(t-\tau)}^{\infty}\varphi(t-\tau,s)\,\chi(s,\tau)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta\,d\tau;$$

pour effectuer cette différentiation de l'expression (14) par rapport à t, il faut d'abord différentier sous le signe $\int_0^t$, ce qui donne

$$(16)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N(t-\tau)}^{\infty}\varphi(t-\tau,s)\,\chi(s,\tau)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta\,d\tau;$$

puis il faut avoir égard à la variabilité de la limite t. Pour le faire commodément, je poserai

$$s = n(t-\tau),$$

l'intégrale (14) devient

$$(17)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_N^{\infty}(t-\tau)^2\,\varphi(1,n)\,\chi[n(t-\tau),\tau]\,dn\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta\,d\tau.$$

---

[*] Cette transformation suppose au fond $t > 0$. Il nous est inutile d'attribuer à t des valeurs négatives : l'interprétation des résultats du calcul n'en serait pas d'ailleurs plus difficile.

L'expression qui se trouve sous le signe $\int_0^t$ s'évanouit pour $\tau = t$ à cause du facteur $t - \tau$, que la différentiation $\frac{d.}{dt}$ ne saurait faire disparaître, parce qu'il entre au carré. Ainsi la variabilité de la limite t n'ajoute rien à l'intégrale (16) déjà écrite.

9. Si l'on effectue les différentiations indiquées, et si l'on pose

$$\frac{d.\varphi(t-\tau, s)}{dt} = \varphi'(t-\tau, s), \quad \frac{d^2.\varphi(t-\tau, s)}{dt^2} = \varphi''(t-\tau, s),$$

on trouvera

$$(18)\quad \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t \left\{ N(t-\tau)\varphi(1, N)\chi[N(t-\tau), \tau] - \int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi'(t-\tau, s)\chi(s, \tau)ds \right\} d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\vartheta,$$

au lieu de l'intégrale (14), et

$$(19)\quad \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t \left\{ \begin{array}{l} N(t-\tau)\varphi(1, N)\frac{d.}{dt}\chi[N(t-\tau), \tau] + N\varphi(1, N)\chi[N(t-\tau), \tau] \\ + N\varphi'(1, N)\chi[N(t-\tau), \tau] - \int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi''(t-\tau, s)\chi(s, \tau)ds \end{array} \right\} d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\vartheta,$$

au lieu de l'intégrale (16) [*].

10. Concevons maintenant, comme dans le premier Mémoire, que l'ébranlement initial ait été circonscrit dans une certaine portion de l'espace autour de l'origine des coordonnées. Concevons, en outre, que l'action de la force accélératrice elle-même soit insensible aussi au delà d'une certaine distance de cette origine. Alors, non-seulement les fonctions $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ s'évanouissent pour des valeurs suffisamment grandes du rayon vecteur

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

mais encore il en sera de même des fonctions $f_1(x, y, z, t)$, $f_2(x, y, z, t)$, $f_3(x, y, z, t)$ quel que soit t.

Nous ne discuterons pas les termes dépendants des six premières

(*) On peut faire aussi le calcul en différentiant l'intégrale (18), mais c'est plus long.

fonctions; nous avons fait cette discussion dans des Mémoires précédents.

Nous allons nous attacher aux termes dépendants des trois dernières, qui représentent les composantes de la force accélératrice.

Pour rechercher les points en mouvement après le temps t, il faudra considérer les expressions de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$. Ces expressions contiendront des termes de la forme (19).

D'après l'équation (7), on a

$$\chi(\rho, \tau) = f(x - \alpha\rho, y - \beta\rho, z - \gamma\rho, \tau).$$

La fonction f désigne l'une quelconque des fonctions f_1, f_2, f_3. Elle n'a de valeur sensible que si le rayon vecteur ρ, qui représente

$$\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2},$$

prend des valeurs qui se rapportent aux points compris dans la portion de l'espace où s'exerce l'action de la force accélératrice.

Pour des points très-éloignés de l'origine des coordonnées, ρ sera très-grand en même temps que r. Par conséquent, la fonction

$$\chi[N(t-\tau), \tau],$$

qui entre dans l'expression (19), n'aura de valeur sensible qu'autant que $N(t-\tau)$ sera très-grand. Mais alors la partie la plus considérable de l'expression (19) sera

$$(20)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t} N(t-\tau)\,\varphi(1, N)\frac{d.}{dt}\chi[N(t-\tau), \tau]\,d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

car elle renferme le facteur $N(t-\tau)$ qui est du même ordre de grandeur que r. A la vérité, le dernier terme de l'expression (19),

$$(21)\quad \frac{-1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t}\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi''(t-\tau, s)\,\chi(s, \tau)\,ds\,d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

peut ne pas s'évanouir sans que la limite inférieure $N(t-\tau)$ de s soit très-grande. Il suffit que la variable s soit comprise entre deux limites ρ_1 et ρ_2 supérieures à $N(t-\tau)$ et comparables à r. Mais, si la fonction

homogène $\varphi''(t-\tau, s)$, du degré -1, ne tend pas vers l'infini en même temps que le rapport $\frac{s}{t-\tau}$, l'intégrale (21) sera très-petite en comparaison de la grandeur que prend l'intégrale (20), quand le facteur $N(t-\tau)$ devient comparable à r. Nous négligerons donc aussi l'intégrale (21) comme insensible. Il s'agira donc seulement de discuter l'intégrale (20).

11. On pourra raisonner comme à la page 18 du premier Mémoire, en ne considérant d'abord que les intégrations relatives à ϖ et à θ. $N(t-\tau)$ devra coïncider avec l'une des valeurs de

$$\rho = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2},$$

pour que la fonction χ, et par suite l'intégrale ne s'évanouisse pas. Si la surface dont le centre est au point (x, y, z), et dont l'équation polaire est

$$\rho = N(t-\tau), \tag{22}$$

ne rencontre pas la portion de l'espace où s'exerce l'action de la force accélératrice, l'intégrale sera nulle. Il faudra donc dans les éléments de l'intégration par rapport à τ, de o à t, choisir les valeurs de τ de manière à remplir cette condition. Il s'ensuit que l'intégration relative à τ sera restreinte, pour chaque valeur de t, entre des limites dont la différence sera comparable aux dimensions de la partie de l'espace soumise à l'action de la force accélératrice. On pourrait déjà tirer les lois cherchées des considérations précédentes. Mais il vaut peut-être mieux donner à l'intégrale (22) une forme plus expressive.

12. De l'équation (22), on tire

$$\tau = t - \frac{1}{N}\rho, \quad N\,d\tau = -d\rho.$$

Pour les limites o et t de τ, on aura les limites Nt et o de ρ, ou o et Nt en changeant le signe de l'intégrale; on pourra même prendre o et ∞, quand Nt sera assez grand pour que celle des surfaces (22) qui répond à $\tau = 0$ embrasse la partie de l'espace agitée par la force ac-

célératrice. Dans le cas contraire, il suffira d'avoir égard à la restriction

$$\rho < Nt. \tag{23}$$

On aura ainsi, en général,

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{N}\varphi(1, N)\frac{d.}{dt}\chi\left(\rho, t-\frac{\rho}{N}\right)\rho\, d\rho \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta. \tag{24}$$

On pourra même revenir aux λ, μ, ν, en renversant les formules

$$x-\lambda = \alpha\rho, \quad y-\mu = \beta\rho, \quad z-\nu = \gamma\rho,$$

qui ont servi aux transformations précédentes; l'intégrale (24) deviendra

$$\frac{1}{8\pi^2}\int\int\int\frac{1}{N}\varphi(1, N)\frac{d.}{dt}f\left[\lambda, \mu, \nu, t-\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}}{N}\right]\frac{d\lambda\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}}. \tag{25}$$

Les limites des intégrations seront $-\infty$ et $+\infty$, ou plutôt les limites de la portion de l'espace où se fait sentir l'action de la force accélératrice; à moins que t ne soit pas encore assez grand et qu'il ne faille avoir égard à la restriction (23), qui revient à

$$\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2} < Nt. \tag{26}$$

13. Si l'on observe que les λ, μ, ν, sont très-petits par rapport à $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on aura approximativement

$$\rho = \sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2} = r - \frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r}. \tag{27}$$

De plus N, qui était fonction de ϖ et θ, est maintenant fonction de $\frac{x-\lambda}{\rho}$, $\frac{y-\mu}{\rho}$, $\frac{z-\nu}{\rho}$, dont les valeurs approchées sont:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x-\lambda}{\rho} &= \frac{x}{r}+\frac{x}{r}\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r^2}-\frac{\lambda}{r}, \\ \frac{y-\mu}{\rho} &= \frac{y}{r}+\frac{y}{r}\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r^2}-\frac{\mu}{r}, \\ \frac{z-\nu}{\rho} &= \frac{z}{r}+\frac{z}{r}\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r^2}-\frac{\nu}{r}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

On peut réduire N à une quantité N_0, fonction de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, toutes les fois que N n'est pas multiplié par r ou par t. Dans ces derniers cas, il faudrait prendre, dans la valeur de N, les termes proportionnels à $\frac{\lambda}{r}$, $\frac{\mu}{r}$, $\frac{\nu}{r}$. La même remarque s'applique à une fonction quelconque de N.

En désignant par A, B, C les dérivées partielles de N_0 par rapport aux quantités $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, regardées comme trois variables indépendantes, on peut écrire

$$(29)\quad N = N_0 + \frac{(Ax+By+Cz)(\lambda x+\mu y+\nu z)}{r^3} - \frac{A\lambda+B\mu+C\nu}{r},$$

et

$$(30)\quad \frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} + \frac{(A\lambda+B\mu+C\nu)}{N_0} - \frac{(Ax+By+Cz)(\lambda x+\mu y+\nu z)}{N_0^2 r^2} - \frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{N_0 r}.$$

Pour simplifier cette dernière expression, il faut faire entrer en considération les propriétés des A, B, C. Or, si l'on met au lieu de $t-\tau$ une valeur H convenablement choisie, l'une des surfaces comprises dans la formule (22) passera par l'origine. Les λ, μ, ν seront nuls pour ce point, et l'on aura

$$(31)\qquad r = N_0 H$$

pour l'équation de la surface en question. N_0 pourra encore être regardé comme fonction de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. La normale au point (x, y, z) fera avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels aux trois expressions

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &A\left(\frac{x^2}{r^2}-1\right)+B\frac{xy}{r^2}+C\frac{xz}{r^2}+\frac{x}{H},\\ &A\frac{xy}{r^2}+B\left(\frac{y^2}{r^2}-1\right)+C\frac{yz}{r^2}+\frac{y}{H},\\ &A\frac{xz}{r^2}+B\frac{yz}{r^2}+C\left(\frac{z^2}{r^2}-1\right)+\frac{z}{H}.\end{aligned}\right.$$

Multiplions les trois expressions (32) par λ, μ, ν, ajoutons-les, désignons

par G la racine carrée de la somme de leurs carrés; nous aurons pour résultat le produit de G par la projection λ' du rayon vecteur, qui va de l'origine au point (λ, μ, ν), sur la normale au point (x, y, z) de la surface (31). Nous trouverons ainsi, en mettant pour H sa valeur $\frac{r}{N_0}$,

$$-(A\lambda + B\mu + C\nu) + \frac{(Ax + By + Cz)(\lambda x + \mu y + \nu z)}{r^2} + \frac{N_0(\lambda x + \mu y + \nu z)}{r} = G\lambda'.$$

L'équation (30) deviendra

$$(33) \qquad \frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} - \frac{G}{N_0^2}\lambda'.$$

D'un autre côté, si l'on multiplie les trois expressions (32) par $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, si l'on ajoute les produits et si l'on a soin de diviser par G, on aura le cosinus de l'angle υ de la normale avec le rayon vecteur r. Ce calcul, peu difficile à cause de la symétrie des expressions, donne, toutes réductions faites,

$$(34) \qquad \frac{N_0}{G} = \cos\upsilon;$$

donc

$$(35) \qquad \frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} - \frac{\lambda'}{N_0 \cos\upsilon}:$$

à l'aide de ces remarques, on pourra remplacer approximativement l'intégrale (25) par

$$(36) \quad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N_0)\int\int\int f\left(\lambda, \mu, \nu, t - \frac{r}{N_0} + \frac{\lambda'}{N_0\cos\upsilon}\right) d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Si l'on transforme les coordonnées λ, μ, ν en d'autres coordonnées rectangulaires λ', μ', ν', en prenant l'axe des λ' dans la direction de la normale que nous avons considérée tout à l'heure, on trouvera, au lieu de l'intégrale précédente, une intégrale de la forme

$$(37) \quad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N_0)\int\int\int f\left(\lambda', \mu', \nu', t - \frac{r}{N_0} + \frac{\lambda'}{N_0\cos\upsilon}\right) d\lambda'\, d\mu'\, d\nu'.$$

On a laissé le même f, pour ne pas trop multiplier les notations.

Les limites sont toujours sensiblement celles de la portion de l'espace soumise à l'action de la force accélératrice, sauf la condition restrictive

$$\frac{r}{N_0} - \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon} < t, \tag{38}$$

qui remplace la condition (26). Elle ne porte plus que sur λ'.

14. On peut arriver plus rapidement au même résultat par des considérations géométriques. En effet, parmi toutes les surfaces semblables comprises dans l'équation (22) et qui ont toutes pour centre commun le point (x, y, z), il y en a toujours une qui passe par le point (λ, μ, ν). Celle-là coupe le rayon vecteur r en un certain point situé à une distance r_1 du point (x, y, z) et à une distance $r - r_1$ de l'origine primitive des coordonnées. Si l'on conçoit en ce point d'intersection le plan tangent et la normale, le point (λ, μ, ν) sera à une distance du plan tangent infiniment petite du second ordre. La projection λ'' du rayon vecteur $r - r_1$ sur un axe parallèle à la normale différera aussi d'un infiniment petit du second ordre de la projection λ' du rayon vecteur qui va de l'origine au point (λ, μ, ν). En désignant par υ l'angle du rayon r avec la normale, on aura donc, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\lambda' = (r - r_1) \cos \upsilon;$$

d'où l'on tire, en divisant par N_0,

$$\frac{r}{N_0} - \frac{r_1}{N_0} = \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon}.$$

N prend la valeur N_0 pour tout point pris sur le rayon vecteur r, par conséquent pour le point situé à la distance r_1 du point x, y, z. Donc, puisque les rayons vecteurs ρ et r_1 se rapportent à des points d'une même surface comprise dans la formule (22), on a

$$\frac{\rho}{N} = \frac{r_1}{N_0},$$

et, par suite,

$$\frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} - \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon},$$

ce qu'il fallait prouver. υ est constant comme N_0, tant que le point (x, y, z) ne change pas, à cause de la similitude des surfaces (22) : υ est aussi une fonction de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. On achèverait la transformation comme précédemment, et l'on trouverait l'intégrale (37).

15. On peut concevoir que l'on ait effectué les intégrations relatives à μ' et ν', et l'on aura seulement à considérer une expression de la forme

$$(39) \qquad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N_0)\int F\left(\lambda', t - \frac{r}{N_0} + \frac{\lambda'}{N_0 \cos\upsilon}\right) d\lambda',$$

toujours sous la restriction (38), ou

$$(40) \qquad t - \frac{r}{N_0} > -\frac{\lambda'}{N_0 \cos\upsilon}.$$

Soient $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon$ les limites de la partie de l'espace qu'agite la force accélératrice, estimées parallèlement à l'axe des λ'. Si l'on a

$$(41) \qquad t - \frac{r}{N_0} > \frac{\varepsilon'}{N_0 \cos\upsilon},$$

les limites de l'intégration relative à λ' pourront être $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon$, ou même $-\infty$ et $+\infty$. La condition (40) sera toujours remplie.

Si l'on a

$$(42) \qquad -\frac{\varepsilon}{N_0 \cos\upsilon} < t - \frac{r}{N_0} < \frac{\varepsilon'}{N_0 \cos\upsilon},$$

la condition (40) sera remplie seulement pour les valeurs de λ' comprises entre $-\varepsilon$ et $\left(t - \frac{r}{N_0}\right) N_0 \cos\upsilon$.

Enfin, si l'on a

$$(43) \qquad t - \frac{r}{N_0} < \frac{-\varepsilon}{N_0 \cos\upsilon},$$

la condition (40) ne sera jamais remplie pour des valeurs de λ' comprises entre $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon$. L'intégrale (39) s'évanouira.

Dans le premier cas, en faisant l'intégration relative à λ', on aura une

expression de la forme

$$(44)\qquad \frac{d.}{dt}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N)\mathfrak{F}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, t - \frac{r}{N_0}\right) \text{[*]}.$$

Il en sera de même dans le second cas. Dans le troisième, on aura o. La fonction $\mathfrak{F}$ devra s'évanouir.

En résumé, l'intégrale, mise sous la forme (44), ne s'évanouira pas, en général, tant qu'on aura

$$(45)\qquad -\frac{\varepsilon}{N_0 \cos \upsilon} < t - \frac{r}{N_0};$$

elle s'évanouira dans le cas contraire.

16. Cela posé, considérons, après le temps t, l'état d'un point quelconque (x, y, z) assez éloigné de l'origine des coordonnées pour que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ soit très-grand par rapport à ε, et faisons

$$(46)\qquad \frac{r}{N_0} - \frac{\varepsilon}{N_0 \cos \upsilon} = T.$$

Tant qu'on aura $t < T$, l'expression (44) s'évanouira; le mouvement n'atteindra pas le point (x, y, z). Il en sera de même à la limite $t = T$. Mais pour $t > T$, le mouvement aura commencé pour ne plus cesser. Il suit de là qu'après un temps déterminé T, le mouvement ne sera pas parvenu au delà de la surface représentée par l'équation (46), ou

$$(47)\qquad r = N_0 T + \frac{\varepsilon}{\cos \upsilon}.$$

Après un temps quelconque $t > T$, tous les points compris en deçà de cette surface seront, en général, animés de vitesses diverses.

17. Pour tous les points situés sur un même rayon vecteur, les quantités $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, N_0, \upsilon, \varepsilon, \varepsilon'$ ne changeront pas; par conséquent la

---

[*] Cette formule a un aspect aussi simple que les formules données par M. Poisson, pour la propagation sphérique d'un ébranlement central instantané. *Voyez* le tome X des *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut*, page 598.

fonction $\mathfrak{F}$ gardera la même valeur si la quantité $t - \frac{r}{N_0}$ reste la même. Or, elle restera la même si, pendant que t augmente ou diminue d'une quantité quelconque h, r augmente ou diminue d'une quantité $k = N_0 h$; donc, dans la direction d'un même rayon vecteur, sans le facteur $\frac{1}{r}$ de l'expression (44), le mouvement se propagerait pour ainsi dire tout d'une pièce, comme si tous les points en mouvement glissaient en quelque sorte simultanément dans la direction du rayon. Le mouvement actuel n'est autre chose qu'un mouvement précédent qui aurait glissé de la même manière; pourvu toujours que l'on ne considère que des points situés à une distance suffisamment grande de l'origine des coordonnées, ce qui exige que la différence $r - k$ reste très-grande.

Si l'on a égard au facteur $\frac{1}{r}$, on se fera encore une image de la propagation en concevant que, pendant cette espèce de glissement du mouvement, les vitesses varient en raison inverse de la distance des points à l'origine.

18. Le facteur $\varphi(1, N_0)$ peut se discuter comme au n° **11** du premier Mémoire [*]. On trouvera sans plus de peine [**],

$$\varphi(1, N_0) = \Omega\psi(1, N_0), \tag{48}$$

et comme ici ω représentera les quantités de la forme L_1, R_2, Q_3, etc., qui entrent dans les valeurs de ξ, η, ζ, Ω représentera des fonctions de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, qui ne changeront pas tant que le point (x, y, z) sera sur le même rayon vecteur. Si donc on prend les parties de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ qui dépendent d'une des fonctions f, par exemple, de la fonction f_1; si en même temps on a égard seulement à l'une des valeurs s'^2 de s^2; ces parties seront proportionnelles à ce que deviennent les quantités L_1, R_2, Q_3, quand on fait les transformations qui changent ω en Ω, c'est-à-

[*] *Voyez* Journal de M. Liouville, tome V, page 19.

[**] *Idem*, page 20.

dire quand elles sont devenues certaines fonctions de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, que nous désignerons encore par L_1, R_2, Q_3, pour ne pas multiplier les notations.

Pour la même valeur s'^2 de s^2, les parties qui dépendent de f_2 seront proportionnelles à R_1, M_2, P_3; celles qui dépendent de f_3 seront proportionnelles à Q_1, P_2, N_3. Je dis que les quantités comprises dans ces trois groupes sont proportionnelles entre elles.

En effet, on a identiquement

$$(49)\quad \begin{cases} (\mathcal{L}_1 - s^2)L_1 + \mathcal{R}_2 R_2 + \mathcal{Q}_3 Q_3 = 0, \\ \mathcal{R}_1 L_1 + (\mathcal{M}_2 - s^2)R_2 + \mathcal{P}_3 Q_3 = 0, \\ \mathcal{Q}_1 L_1 + \mathcal{P}_2 R_2 + (\mathcal{N}_3 - s^2)Q_3 = 0; \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} (\mathcal{L}_1 - s^2)R_1 + \mathcal{R}_2 M_2 + \mathcal{Q}_3 P_3 = 0, \\ \mathcal{R}_1 R_1 + (\mathcal{M}_2 - s^2)M_2 + \mathcal{P}_3 P_3 = 0, \\ \mathcal{Q}_1 R_1 + \mathcal{P}_2 M_2 + (\mathcal{N}_3 - s^2)P_3 = 0; \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{cases} (\mathcal{L}_1 - s^2)Q_1 + \mathcal{R}_2 P_2 + \mathcal{Q}_3 N_3 = 0, \\ \mathcal{R}_1 Q_1 + (\mathcal{M}_2 - s^2)P_2 + \mathcal{P}_3 N_3 = 0, \\ \mathcal{Q}_1 Q_1 + \mathcal{P}_2 P_2 + (\mathcal{N}_3 - s^2)N_3 = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs le déterminant de chacun de ces trois systèmes d'équations n'est autre chose que le second membre de la formule (3). Il est nul quand on met pour s^2 une des racines s'^2 de l'équation $S = 0$, du troisième degré en s^2. Donc chacun des systèmes, insuffisant pour déterminer les quantités du genre ω, qui y entrent, détermine leurs rapports. Donc les quantités L_1, R_2, Q_3 qui satisfont au premier système d'équations sont proportionnelles aux quantités R_1, M_2, Q_3 qui satisfont au second, et aussi aux quantités Q_1, P_2, N_3 qui satisfont au troisième. Ce qu'il fallait prouver.

Donc, dans les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, les parties qui dépendent de s' seront proportionnelles aux quantités de ces trois groupes.

Si les parties dépendantes de s'' et s''' étaient supprimées, en vertu de la discussion précédente, les trois composantes de la vitesse d'un

point quelconque (x, y, z) d'un même rayon vecteur indéfini seraient, à une grande distance de l'origine, proportionnelles aux quantités L_1, R_2, Q_3, par exemple, d'un même groupe. La vitesse elle-même se trouverait constamment parallèle à une droite qui ferait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus seraient proportionnels à ces quantités. Le mouvement serait polarisé sur chaque rayon vecteur. La direction de la vitesse changerait d'un rayon vecteur à un autre, à cause du changement de valeurs des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

19. A l'aide des considérations exposées dans les deux numéros précédents, il est très-aisé de se faire une idée du mouvement qui, après un temps t très-grand, agite tous les points de l'espace à une assez grande distance de l'origine des coordonnées, jusqu'à une autre distance bien plus grande encore qui dépend de la grandeur du temps t.

En effet, si l'on fait abstraction d'abord des termes dépendants de s'' et de s''', et si l'on considère tous les points (x, y, z) situés sur une même surface comprise dans la formule

$$r = N_0 H, \tag{52}$$

pour une valeur très-grande du paramètre H; après un temps $t > H$, ces points seront animés de vitesses diverses, mais parallèles à des directions dépendantes seulement de celles des rayons vecteurs respectifs. A mesure que le temps augmentera, le mouvement se propagera en avant; et, si l'on considère la succession des diverses surfaces comprises dans la formule (52) en y regardant H comme un paramètre variable, le mouvement passera progressivement d'une surface à une autre, de telle sorte que la vitesse restera dans chaque rayon vecteur parallèle à elle-même et variera en raison inverse de la distance à l'origine. Les vitesses des différents points d'une surface seront proportionnelles à celles des points homologues d'une autre. Le mouvement restera pour ainsi dire semblable à lui-même.

Ces surfaces devront être regardées comme les surfaces des ondes; l'état de la portion de l'espace comprise entre deux surfaces très-rapprochées constituera, en quelque sorte, l'onde élémentaire. Mais ici

l'épaisseur proprement dite des ondes ne serait pas bien définie. Elle pourrait l'être si la fonction f était périodique par rapport au temps; les épaisseurs se déduiraient facilement de l'étendue des périodes. Nous reviendrons sur ce sujet.

20. Si l'on fait abstraction des termes dépendants de s' et de s''', on arrivera à des conséquences analogues, et l'on aura pour s'' une propagation d'ondes élémentaires polarisées comme les précédentes, mais non pas dans les mêmes directions sur les mêmes rayons vecteurs, parce que les Ω dépendent de s. Il en sera de même pour s'''.

Or, dans ces trois propagations partielles, les composantes des vitesses suivant les axes s'ajoutent pour les mêmes points de l'espace; donc les vitesses elles-mêmes se composent statiquement, et par conséquent la considération de ces trois systèmes d'ondes polarisées suffit pour permettre de construire la vitesse totale en chaque point.

Dans un même rayon vecteur les vitesses partielles sont toujours parallèles à elles-mêmes, mais elles ne restent pas proportionnelles, à cause de la différence des vitesses de propagation qui dépendent des N_0. La vitesse résultante n'est donc pas constamment parallèle à elle-même. Elle n'est pas polarisée dans le sens naturel de cette expression. On s'en fera une idée plus nette par la considération des trois systèmes d'ondes élémentaires, qui, ayant des lois de propagation bien distinctes, peuvent pourtant se composer à chaque instant en chaque point et faire connaître complétement l'état de ce point. C'est une coexistence de petits mouvements [*].

21. Si l'on voulait étudier les déplacements au lieu des vitesses, il faudrait discuter les valeurs de ξ, η, ζ. Elles renferment des termes de la forme de l'expression (18). La partie la plus considérable de cette expression est encore la première intégrale. Il semblerait au premier abord que l'on pourrait conserver quelque inquiétude sur la grandeur

[*] Pour faire usage des considérations générales de M. Duhamel, il eût fallu chercher d'abord les intégrales des équations (1), en supposant les seconds membres de ces équations indépendants de t et fonctions seulement des coordonnées x, y, z. Ces intégrales sont comprises, comme cas particulier, dans les formules que j'ai employées.

relative de la seconde, surtout si l'on faisait la transformation

$$s = n(t - \tau), \quad ds = (t - \tau)\,dn.$$

Mais il suffit d'observer que la fonction $\chi(s, \tau)$ ne peut être sensible que pour des valeurs de s correspondantes à celles de ρ dans la partie de l'espace troublée par la force accélératrice, et de mettre l'intégrale relative à s sous la forme

$$\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi'(t - \tau, s)\,\chi(s, \tau)\,ds = \varphi(t - \tau, s_1)\,\chi(s_1, \tau) \int_{N(t-\tau)}^{\infty} ds,$$

dans laquelle s_1 représente une valeur moyenne entre les diverses valeurs de s.

Comme, au lieu des limites en évidence, il faut prendre au fond des limites relatives aux ρ, cette intégrale ne peut être que très-petite en comparaison du premier terme. Il ne pourrait y avoir exception que dans le cas où la fonction φ' tendrait vers l'infini pour de très-grandes valeurs de s. Mais cette circonstance sera elle-même écartée (n° **24**).

La partie la plus considérable de l'expression (18) sera donc

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t} N(t - \tau)\,\varphi(1, N)\,\chi[N(t - \tau), \tau]\,d\tau \sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

On la réduira par les moyens précédents et l'on tombera sur une expression semblable à l'expression (44), sauf la différentiation

$$\frac{d.}{dt}.$$

22. On aura donc pour les déplacements des conséquences tout à fait analogues à celles que l'on a eues pour les vitesses. Le déplacement d'un point quelconque sera la résultante statique de trois déplacements partiels qui se transmettront par des systèmes d'ondes élémentaires distincts, polarisés, et dans lesquels les écarts seront en raison inverse des distances à l'origine. Nous ne nous y arrêterons pas davantage.

23. Les considérations développées dans les deux Mémoires in-

sérés au tome VII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, pages 13 et suivantes, peuvent évidemment trouver place ici. Il faudra d'abord mettre partout $t - \tau$ au lieu de t, et ensuite intégrer par rapport à τ, depuis o jusqu'à t. Les éléments des diverses parties des intégrales réunies sous le signe $\int_0^t$ donneront une somme rigoureusement nulle pour des valeurs de s supérieures à une certaine limite de la forme

$$N(t - \tau) < Nt.$$

Il n'en faut pas davantage pour faire concevoir que les points du milieu restent rigoureusement en repos jusqu'à ce que le temps soit devenu assez grand pour y faire arriver la plus avancée des ondes élémentaires dont nous avons étudié les propriétés.

24. Les portions d'intégrales qui subsisteront sous le signe extérieur $\int_0^t$ seront, d'après les formules (2) et (3) du tome VII cité [*], prises entre des limites de la forme

$$N''(t - \tau), \quad \text{et} \quad N'(t - \tau).$$

Par conséquent s, comme ρ, sera compris entre les mêmes limites; donc s sera toujours du même ordre de grandeur que les quantités de la forme

$$N(t - \tau);$$

donc, en général, les fonctions φ, φ', φ'', considérées aux n^{os} **10** et **21**, restent finies quand s croît indéfiniment; ce qui écarte toute restriction à cet égard.

25. Au lieu de supposer, dans tout ce qui précède, l'action de la force accélératrice circonscrite dans une certaine portion de l'espace autour de l'origine des coordonnées, on pourrait la supposer circon-

---

[*] *Voyez* page 24.

scrite autour d'un autre point (a, b, c). Il suffirait de remplacer dans tous les calculs approchés λ, μ, ν par $\lambda - a$, $\mu - b$, $\nu - c$, et x, y, z, r par $x - a$, $y - b$, $z - c$, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. L'on trouverait que les trois systèmes d'ondes élémentaires se développeraient autour du point (a, b, c) qui en serait le centre commun.

Les deux propagations autour de l'origine et du point (a, b, c) pourraient avoir lieu simultanément et même avec autant d'autres systèmes que l'on voudrait. On devrait faire en chaque point la composition des petits mouvements qu'y amènerait chaque système considéré seul. Au lieu de l'expression (44) on aurait une somme $\sum$ d'expressions de même genre. Mais il faudrait que les points dont on chercherait le mouvement fussent à une grande distance de toutes les portions de l'espace agitées par les forces accélératrices. On pourrait même sous cette condition étudier le mouvement produit par une infinité de systèmes pareils; dans ce cas, la somme $\sum$ serait remplacée par une intégrale triple dont les limites dépendraient de l'étendue de l'action de la force accélératrice [*].

Si l'on considérait le mouvement partiel dû à l'action de la force accélératrice sur une portion de l'espace circonscrite dans un élément de volume $d.V$ autour d'un point (a, b, c), les intégrations relatives aux (λ, μ, ν) indiquées par la formule (36) se feraient facilement. Après avoir remplacé λ, μ, ν par $\lambda + a$, $\mu + b$, $\nu + c$, et x, y, z par $x - a$, $y - b$, $z - c$, il suffirait de faire sous les signes $\int$ les nouveaux λ, μ, ν et λ' égaux à 0, puis de multiplier par l'élément de volume $d.V$ qui représenterait la somme de tous les éléments $d\lambda.d\mu.d\nu$ compris dans l'espace élémentaire que l'on considère. Il faudrait enfin intégrer par rapport à l'élément de volume $d.V$ relatif au point (a, b, c); ce qui amènerait une intégrale triple de même généralité que l'intégrale (25). On n'aurait rien gagné, si l'on avait pour but de chercher l'effet de

---

[*] Ces résultats immédiats de la forme des intégrales pouvaient être prévus comme conséquences des lois générales de M. Duhamel.

l'action d'une force accélératrice limitée à une portion de l'espace dont toutes les dimensions fussent de grandeurs comparables entre elles; mais si l'une des dimensions était très-petite, comme, par exemple, dans le cas où la portion de l'espace agitée par la force accélératrice serait comprise entre deux surfaces très-voisines l'une de l'autre, ce genre de considérations pourrait faire connaître le mouvement d'un point quelconque, situé à une distance de la couche agitée, très-grande seulement par rapport à l'épaisseur de cette couche, mais non par rapport à ses autres dimensions.

Cette dernière remarque est importante pour des recherches ultérieures, dont j'espère soumettre bientôt les résultats au jugement de l'Académie.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES

DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES;

PAR M. OSSIAN BONNET,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

I.

Problème. « Étant donnée une chaîne parfaitement flexible et » homogène, mais d'inégale épaisseur, dont tous les éléments sont » soumis à l'action de forces centrales inversement proportionnelles à » la distance, trouver la loi suivant laquelle doit varier l'épaisseur » en chaque point et la courbe que doit affecter la chaîne dans l'état » d'équilibre, pour que, dans cet état, la tension varie d'un point à » l'autre proportionnellement à l'épaisseur, ou que la chaîne présente » partout égale chance à la rupture. »

Solution. Soit a le rapport constant qui existe entre l'épaisseur ω et la tension T en chaque point de la chaîne dans l'état d'équilibre; appelons $R = f(r)$ l'intensité de la force centrale donnée, que nous supposons d'abord fonction quelconque de la distance, nous aurons pour l'équilibre d'un quelconque des éléments de la chaîne,

$$d.\left(T\frac{dx}{ds}\right) = \pm aTR\frac{x}{r}ds,$$

$$d.\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \pm aTR\frac{y}{r}ds:$$

le centre des forces étant pris pour origine des coordonnées, et le signe des seconds membres étant + ou —, selon que les forces sont attractives ou répulsives.

Ajoutons les deux équations précédentes, après les avoir respecti-

vement multipliées d'abord par $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, puis par $-y$ et x; il viendra

$$dT = \pm a T R dr, \qquad d\left[T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] = 0,$$

d'où, intégrant,

$$(1) \qquad T = Ce^{\pm a\int R dr}, \quad T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C'.$$

L'avant-dernière équation nous fait déjà connaître la tension en chaque point de la chaîne dans l'état d'équilibre; on en déduit aisément l'épaisseur

$$(2) \qquad \omega = aT = aCe^{\pm a\int R dr}.$$

Pour avoir ensuite l'équation de la courbe d'équilibre de la chaîne, il suffit d'éliminer T entre les équations (1); on trouve ainsi

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \frac{C'}{C}e^{\mp a\int R dr},$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$\frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{C'}{C}e^{\mp a\int R dr},$$

d'où

$$d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{C^2}{C'^2}r^2 e^{\pm 2a\int R dr} - 1}},$$

d'où, intégrant,

$$(3) \qquad \theta + \alpha = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{C^2}{C'^2}r^2 e^{\pm 2a\int R dr} - 1}}.$$

Les constantes introduites par les intégrations sont faciles à interpréter: si les deux quadratures qui entrent dans le second membre de l'équation (3) sont l'une et l'autre prises à partir du pied de la normale menée par l'origine à la courbe représentée par cette équation (3), les constantes $-\alpha$, $\frac{C'}{C}$, C ne seront autre chose, respectivement, que les valeurs de θ, r, T qui répondent à ce point; et

quant à la constante a, on sait qu'elle exprime le rapport constant qui existe entre l'épaisseur et la tension en chaque point de la chaîne dans l'état d'équilibre. Il est presque inutile de dire que les quatre constantes dont il s'agit se déterminent dans chaque cas particulier en exprimant que la chaîne passe par deux points, qu'elle a entre ces points une longueur déterminée, et enfin qu'elle a en un point une épaisseur connue.

II.

Sortons maintenant des généralités précédentes pour nous occuper exclusivement du cas où la force est inversement proportionnelle à la distance.

Posons donc

$$f(r) = \frac{1}{r},$$

l'unité de force étant celle qui agit à l'unité de distance; les équations (2) et (3) deviendront

$$(4) \qquad \omega = aT_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm a}, \qquad \theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(1\pm a)} - 1}},$$

en prenant, comme on l'a dit plus haut, les intégrales à partir du pied de la normale menée de l'origine à la courbe qu'affecte la chaîne dans l'état d'équilibre, et appelant θ_0, r_0, T_0 les valeurs respectives de θ, r, T en ce point.

L'intégrale contenue dans le second membre de la dernière équation s'évalue aisément en posant

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1\pm a} = \text{séc}\,\varphi, \quad \text{d'où} \quad \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(1\pm a)} - 1}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1 \pm a} = \frac{\varphi}{1 \pm a},$$

et l'on trouve pour cette équation :

$$(5) \qquad r^{1\pm a}\cos(1 \pm a)(\theta - \theta_0) = r_0^{1\pm a};$$

ce qui nous montre que les courbes d'équilibre de la chaîne dans le cas considéré ne sont autre chose que les courbes remarquables que

M. Serret a considérées pour la première fois, dans le tome VII de ce *Journal*, et dont les arcs représentent, dans un grand nombre de cas, les intégrales eulériennes de seconde espèce. On sait que ces courbes renferment comme cas particulier le cercle, l'hyperbole équilatère, la lemniscate, etc. Du reste, la valeur de a d'où dépend la nature de la courbe d'équilibre, de même que les valeurs de θ_0 et r_0, se déterminera dans chaque cas particulier, ainsi qu'on l'a dit plus haut, en exprimant que la courbe passe par deux points, et qu'elle a entre ces points une longueur connue.

III.

Reprenons la première des équations (4),

$$\omega = a\mathrm{T}_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm a}. \tag{6}$$

Cette équation nous fait connaître l'épaisseur en chaque point de la chaîne en fonction de r ou de la distance de l'origine au point considéré, dans la position d'équilibre. On peut encore exprimer l'épaisseur en chaque point en fonction du volume de la chaîne compris entre ce point et un point déterminé; et la formule que l'on obtient à cet effet, d'une forme assez remarquable, a l'avantage de s'appliquer quelle que soit la position qu'occupe la chaîne, lorsque par conséquent elle est étendue en ligne droite sur un plan.

Prenons pour axe polaire la normale à la courbe (5) menée par l'origine, et posons, pour simplifier,

$$1 \pm a = m, \qquad a\mathrm{T}_0 = \omega_0,$$

les équations (5) et (6) deviendront

$$r^m \cos m\theta = r_0^m, \tag{7}$$

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m-1}. \tag{8}$$

Nous tirons de l'avant-dernière équation la différentielle de l'arc qu'affecte la chaîne

$$ds = r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m+1} d\theta,$$

d'où, pour le volume compté à partir de l'axe polaire,

$$V = \omega_0 r_0 \int_0^\theta \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} d\theta = \omega_0 r_0 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 m\theta} = \frac{\omega_0 r_0}{m} \operatorname{tang} m\theta;$$

éliminant θ entre cette équation et l'équation (8), qui revient à

$$\frac{\omega_0}{\omega} = (\cos m\theta)^{\frac{m-1}{m}},$$

on trouve

$$(9) \qquad V^2 = \frac{\omega_0^2 r_0^2}{m^2}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1\right],$$

pour l'équation cherchée. Cette équation, après que les constantes ω_0, r_0 et m ont été déterminées, donne le volume de la chaîne en fonction de l'épaisseur au point où l'on s'arrête, et réciproquement.

Cette même équation peut servir à déterminer la forme de la chaîne.

Assimilons cette chaîne étendue en ligne droite sur un plan au volume engendré par un cercle de rayon variable qui se meut parallèlement à lui-même en touchant par les extrémités d'un même diamètre une droite et une courbe; et proposons-nous de déterminer l'équation de cette courbe directrice. Soient y_0 le diamètre initial du cercle générateur, et $y + y_0$ le diamètre lorsque ce cercle a parcouru sur la ligne droite l'espace x, nous aurons

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^x (y + y_0)^2 dx, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{4} y_0^2, \qquad \omega = \frac{\pi}{4}(y + y_0)^2;$$

portant ces valeurs dans l'équation (9), il vient

$$\int_0^x (y + y_0)^2 dx = \frac{r_0 y_0^2}{m}\sqrt{\left(\frac{y + y_0}{y_0}\right)^{\frac{4m}{m-1}} - 1},$$

d'où, différentiant,

$$(10) \qquad dx = \frac{2r_0}{y_0(m-1)} \frac{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{m+3}{m-1}} dy}{\sqrt{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{4m}{m-1}} - 1}},$$

et intégrant,

$$(11)\qquad x = \frac{2r_0}{y_0(m-1)}\int_0^y \frac{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{m+3}{m-1}} dy}{\sqrt{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{4m}{m-1}} - 1}}.$$

La quadrature contenue dans le second membre de la dernière équation est une intégrale binôme qui ne peut être évaluée, d'après les principes connus, que lorsque $\frac{m+1}{2m}$ ou $\frac{1}{2m}$ est un nombre entier; la première condition est remplie pour $m = -1$, la seconde pour $m = \pm\frac{1}{2}$: pour la première de ces valeurs de m, l'équation (7) représente une circonférence; pour les deux autres, elle représente une parabole dont le foyer est à l'origine, et une épicycloïde extérieure, ayant pour module $\frac{1}{2}$. Si dans ces trois cas on effectue l'intégration, on trouve successivement pour l'équation (11),

$$(y + y_0)\cos\frac{x}{r_0} = y_0,$$

$$\frac{x}{r_0} = \left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-2}\left[\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-1} - 1\right]^{\frac{1}{2}} + \log\left\{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-2} + \left[\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-1} - 1\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{3}\left[1 - \left(\frac{x}{2r_0}\right)^{2}\right]^{3} = 1.$$

Mais, sans nous arrêter à ces cas particuliers, qui, comme l'on voit, conduisent à des résultats assez compliqués, remarquons que l'on peut, quel que soit m, avoir la courbe représentée par l'équation (10) ou (11), par une construction géométrique. En effet, posons

$$(m+1)x = u, \quad \left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{2(m+1)}{m-1}} = \frac{v}{r_0},$$

l'équation (10) deviendra

$$(12)\qquad du = \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{v}{r_0}\right)^{\frac{2m}{m+1}} - 1}},$$

et il est clair que si l'on peut construire la courbe représentée par cette dernière équation, on pourra aussi avoir, par une construction géométrique, autant de points que l'on voudra de la courbe représentée par l'équation (10).

Or, je dis que si l'on fait rouler sur une ligne droite la courbe représentée par l'équation (7), le centre de cette courbe décrira une courbe comprise dans l'équation (12).

Pour le faire voir, remarquons que r et θ étant les coordonnées polaires d'un point quelconque d'une courbe, prises par rapport à un axe et à une origine arbitraires, mais invariablement liés à cette courbe, et x et y les coordonnées rectangles du point qui sert d'origine, quand on a fait rouler la courbe sur l'axe des x, de manière que le contact ait lieu au point dont les coordonnées sont r et θ, on a

$$(13)\qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{rd\theta}{dr}, \quad y = \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}.$$

Or, supposons que la courbe qu'on fait rouler soit celle que représente l'équation (7), on aura alors

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} - 1}}, \quad \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-m};$$

par conséquent

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} - 1}}, \quad y = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-m}.$$

d'où, éliminant $\frac{r}{r_0}$,

$$(14)\qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1}},$$

équation qui est bien comprise dans l'équation (12).

On peut déduire de là quelques résultats connus. Si l'on fait

$$\frac{2m}{1-m} = -1, \quad \text{ou} \quad m = -1,$$

l'équation (14) devient celle d'une cycloïde, et l'équation (7) celle d'un cercle; nous retombons donc sur la propriété caractéristique de la cycloïde. Si

$$\frac{2m}{1-m} = 2, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1}{2},$$

l'équation (14) devient celle d'une chaînette et l'équation (7) celle d'une parabole rapportée à son foyer, d'où l'on peut conclure que, lorsqu'on fait rouler une parabole sur une droite, le foyer de cette parabole décrit une chaînette. Si l'on pose

$$\frac{2m}{1-m} = -4, \quad \text{d'où} \quad m = 2,$$

l'équation (14) devient celle d'une courbe élastique rectangulaire, et l'équation (7) celle d'une hyperbole équilatère rapportée à ses axes; nous pouvons donc dire que le centre d'une hyperbole équilatère roulant sur une droite, décrit une courbe élastique rectangulaire, etc.

IV.

Si, au lieu de faire rouler sur une droite la courbe représentée par l'équation (7), on fait rouler une courbe parallèle à cette dernière, on obtient un résultat très-simple et qui ne diffère que très-peu de celui que nous avons obtenu en faisant rouler la courbe (7).

Rappelons d'abord que les géomètres appellent courbes parallèles à une courbe donnée, les lieux des points obtenus en prenant sur toutes les normales de cette courbe, et à partir des points de contact, une même longueur a.

Cela étant, on voit aisément que ξ et η étant les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la courbe parallèle à la courbe (7), on a

$$\xi = r\cos\theta + a\cos(m-1)\theta,$$

$$\eta = r\sin\theta - a\sin(m-1)\theta;$$

ou, en appelant ρ et φ les coordonnées polaires correspondantes aux

coordonnées rectangles ξ et η,

$$(15)\qquad \rho e^{\varphi\sqrt{-1}} = re^{\theta\sqrt{-1}} + ae^{-(m-1)\theta\sqrt{-1}},$$

$$(16)\qquad \rho e^{-\varphi\sqrt{-1}} = re^{-\theta\sqrt{-1}} + ae^{(m-1)\theta\sqrt{-1}},$$

avec la condition

$$(17)\qquad r^m \cos m\theta = r_0^m.$$

Reprenons maintenant les équations (13) qui, en changeant r en ρ et θ en φ, deviennent

$$(18)\qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{\rho d\varphi}{d\rho}, \qquad y = \frac{\rho^2 d\varphi}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}};$$

et éliminons r, θ, ρ et φ entre ces deux équations et les équations (15), (16) et (17).

De l'égalité (15), nous tirons d'abord

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} d\rho + \rho e^{\varphi\sqrt{-1}} \sqrt{-1}\, d\varphi = e^{\theta\sqrt{-1}} dr$$
$$+ re^{\theta\sqrt{-1}} \sqrt{-1}\, d\theta - (m-1) a e^{-(m-1)\theta\sqrt{-1}} \sqrt{-1}\, d\theta,$$

d'où, multipliant par l'équation (16) et égalant respectivement les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres,

$$\rho d\rho = rdr - (m-1) ar \sin m\theta\, d\theta + a \cos m\theta\, dr - ar \sin m\theta\, d\theta,$$
$$\rho^2 d\varphi = r^2 d\theta - (m-1) ar \cos m\theta\, d\theta + a \sin m\theta\, dr$$
$$+ ar \cos m\theta\, d\theta - (m-1) a^2 d\theta;$$

simplifiant, au moyen de l'équation

$$\cos m\theta\, dr = r \sin m\theta\, d\theta,$$

que l'on déduit de l'équation (17), il vient

$$\rho d\rho = dr[r - (m-1) a \cos m\theta],$$

$$\rho^2 d\varphi = \frac{(r\cos m\theta + a)[r - (m-1) a \cos m\theta] d\theta}{\cos m\theta} = \frac{(r\cos m\theta + a)[r - (m-1) a \cos m\theta] dr}{r \sin m\theta}.$$

Nous tirons de là

$$\frac{\rho d\varphi}{d\rho} = \frac{r\cos m\theta + a}{r\sin m\theta};$$

d'ailleurs les équations (15) et (16), multipliées l'une par l'autre, donnent

$$\rho^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos m\theta;$$

substituant dans les équations (18), en remarquant que la seconde de ces équations revient à

$$\rho = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

à cause de la première, on trouve

$$r\sin m\theta = y\frac{dy}{dx}, \qquad r\cos m\theta = y - a,$$

d'où enfin, au moyen de l'équation (17),

$$dx = \frac{ydy}{(y-a)\sqrt{\left(\frac{y-a}{r_0}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1}}.$$

Cette équation, quand on fait $a = 0$, devient l'équation (14), comme cela doit être. On en tire divers résultats plus ou moins curieux en faisant varier m. Si, par exemple, on fait $m = 2$, auquel cas la courbe (17) est une hyperbole équilatère, on trouve pour l'équation de courbe engendrée

$$dx = \frac{\frac{y(y-a)}{r_0^2}dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{y-a}{r_0}\right)}}.$$

V.

Les courbes représentées par l'équation (12), qui comprennent comme cas particulier la cycloïde, s'obtiennent en généralisant plusieurs propriétés de cette courbe.

On sait que dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale; proposons-nous de trouver plus généralement la courbe dans laquelle le rayon de courbure est égal à m fois la normale : nous aurons pour l'équation différentielle de la courbe cherchée.

$$\frac{1+p^2}{q} = my, \quad \text{ou} \quad \frac{q}{1+p^2} = \frac{1}{m}\frac{1}{y}.$$

Multipliant les deux membres par $2dy$, et observant que

$$qdy = \frac{dp}{dx}dy = pdp,$$

il viendra

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{2}{m}\frac{dy}{y},$$

d'où, intégrant,

$$1 + p^2 = Cy^{\frac{2}{m}},$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{Cy^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

équation de même forme que l'équation (12).

De même, la cycloïde étant la courbe de plus vite descente dans le vide, l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

doit être un minimum pour la cycloïde; or, les courbes comprises dans l'équation (12) rendent minimum l'intégrale plus générale

$$\int y^n \sqrt{1+p^2}\,dx,$$

ainsi qu'on peut le voir dans le *Methodus inveniendi*, etc., page 50.

On obtient des courbes, dont celles que représente l'équation (12) ne sont que des cas particuliers, en généralisant d'autres propriétés de la cycloïde.

Ainsi, proposons-nous de trouver la courbe dans laquelle le rayon de courbure ρ est dans un rapport constant avec la puissance n de l'ordonnée. Nous aurons d'abord

$$\frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = ay^{-n},$$

d'où, multipliant par $2dy$ et intégrant,

$$(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = C + C'y^{1-n},$$

d'où

$$dx = \frac{(C + C'y^{1-n})\,dy}{\sqrt{1-(C+C'y^{1-n})^2}}, \tag{19}$$

équation qui rentre dans l'équation (14) quand on fait $C = 0$.

On sait que l'on trouve la cycloïde en cherchant la courbe pour laquelle l'espace compris entre elle et sa développée est le plus petit, c'est-à-dire en cherchant la courbe pour laquelle l'intégrale

$$\int \rho\, ds = \int \frac{(1+p^2)^2}{q}\, dx$$

est minimum.

Si plus généralement on se propose de trouver la courbe pour laquelle l'intégrale

$$\int \rho^n\, ds = \int \frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n}\, dx$$

est minimum, on trouve une courbe comprise dans l'équation (19).

Euler, qui, dans le *Methodus inveniendi*, etc., page 66, a résolu ce dernier problème, n'a pas remarqué que sa solution coïncidait avec la courbe dans laquelle il existe un rapport constant entre le rayon de courbure et une puissance de l'ordonnée.

Voici un moyen simple d'établir cette coïncidence :

La courbe dont l'ordonnée rend minimum l'intégrale

$$\int \frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n}\, dx,$$

a pour équation différentielle, d'après la méthode des variations,

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n} = C + C'p - n\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n};$$

ou

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n} = C + C'p.$$

Si ρ est le rayon de courbure de la courbe cherchée, on a

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

donc

$$\rho^n = \frac{C + C'p}{\sqrt{1+p^2}}$$

peut être considérée comme l'équation de la courbe; de là on tire

$$n\rho^{n-1}\,d\rho = \frac{(C - C'p)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,dp;$$

et comme

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

on a

$$n\rho^n\,d\rho = \frac{C - C'p}{q}\,dp = (C - C'p)\,dx = C\,dx - C'\,dy.$$

d'où

$$\rho^{n+1} = Cx + C'y + C'',$$

équation qui, en changeant convenablement la position et la direction des axes, peut se ramener à la forme

$$\rho^{n+1} = ay, \quad \text{ou} \quad \rho = a^{\frac{1}{n+1}}\,y^{\frac{1}{n+1}},$$

ce que nous nous étions proposé de faire voir.

VI.

Cherchons la développée de la courbe représentée par l'équation (12), ou plus simplement par l'équation

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{y^m - 1}}. \tag{20}$$

Soient x, y les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, ρ le rayon de courbure en ce point, et α, β les coordonnées du centre de courbure au même point; on aura

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}, \quad d\alpha^2 + d\beta^2 = d\rho^2.$$

Or, de l'équation (20) on déduit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^m - 1}}, \quad \text{et} \quad \rho = \frac{2}{m} y^{\frac{m+2}{2}},$$

d'où

$$d\rho = \frac{m+2}{m} y^{\frac{m}{2}} dy :$$

on a donc

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{y^m - 1}}, \quad d\alpha^2 + d\beta^2 = \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 y^m dy^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\beta}{1} = -\frac{d\alpha}{\sqrt{y^m - 1}} = \sqrt{\frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{y^m}} = \frac{m+2}{m} dy,$$

d'où

$$d\beta = \frac{m+2}{m} dy, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{m+2}{m} y + C,$$

et

$$d\alpha = \frac{m+2}{m} dy \sqrt{y^m - 1} = d\beta \sqrt{\left(\frac{m}{m+2}\beta - C\right)^m - 1}$$

Si l'on porte l'axe des β parallèlement à lui-même, de manière à faire

disparaître la constante C, et qu'on mette x et y en place de α et β, il viendra

$$dx = dy\sqrt{\left(\frac{m}{m+2}y\right)^m - 1}.$$

Cette équation représente une courbe semblable à celle qui a pour équation

$$dx = dy\sqrt{y^m - 1}, \tag{21}$$

et qui est évidemment la trajectoire orthogonale des courbes comprises dans l'équation (14).

Les courbes que l'on vient d'obtenir et dont l'équation peut toujours se ramener à la forme (21), quoique moins remarquables que celles que représente l'équation (20), jouissent de plusieurs propriétés assez curieuses; comme ces dernières, elles comprennent la cycloïde, et on les obtient en généralisant plusieurs propriétés de cette courbe. Ainsi, ces courbes sont celles pour lesquelles une puissance quelconque de l'arc est proportionnelle à l'abscisse. Or, on sait que la cycloïde est la courbe pour laquelle le carré de l'arc est proportionnel à l'abscisse. La propriété de tautochronisme dont jouit la cycloïde montre que, pour cette courbe, l'intégrale

$$\int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}}$$

est indépendante de h; plus généralement les courbes représentées par l'équation (21) sont celles pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^h (h-x)^n\, ds$$

est indépendante de h. C'est ce que l'on reconnaît aisément, soit par la méthode qu'a exposée Poisson (Voir sa *Mécanique*, tome Ier. page 373), soit par le calcul des différentielles à indices fractionnaires de M. Liouville, etc.

VII.

Je terminerai en rappelant une propriété de minimum dont jouis-

sent les courbes (7) et qui a été indiquée par Euler dans le *Methodus inveniendi*, etc., page 53. D'après cette propriété, les courbes (7) sont celles pour lesquelles l'intégrale

$$\int r^n\,ds = \int r^n \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}$$

est un minimum. En effet, la méthode des variations nous donne pour l'équation différentielle des dernières courbes

$$r^n \sqrt{r^2 + r'^2} = \mathrm{C} + \frac{r^n r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

d'où

$$r^{n+2} = \mathrm{C}\sqrt{r^2 + r'^2},$$

d'où

$$d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{\dfrac{r^{2(n+1)}}{\mathrm{C}^2} - 1}}.$$

d'où, en intégrant comme au § II,

$$r^{n+1}\cos(n+1)(\theta - \theta_0) = \mathrm{C}.$$

NOTE
SUR UN THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. OSSIAN BONNET,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Lagrange a montré depuis longtemps (*Mécanique analytique*, t. II, p. 116) que la même section conique qui peut être décrite en vertu d'une force tendante à l'un des foyers en raison inverse du carré de la distance ou tendante au centre en raison directe de la distance, peut l'être encore, sous certaines conditions, en vertu de trois forces pareilles tendantes aux deux foyers et au centre; ce qui, dit-il, est très-remarquable.

Legendre a été conduit plus tard à une conséquence analogue, mais plus explicite, dans le *Traité des fonctions elliptiques*; on lit, en effet, à la page 426 du tome Ier de cet ouvrage :

« Soit A le sommet d'une ellipse dont F et G sont les deux foyers, » soit V′ la vitesse en A nécessaire pour que cette ellipse soit décrite » en vertu de la force A appliquée au foyer F, soit pareillement V″ la » vitesse en A nécessaire pour que l'ellipse soit décrite en vertu de la » force B appliquée à l'autre foyer G ; si ces deux forces agissent à la fois » sur le mobile et que la vitesse initiale V soit telle que $V^2 = V'^2 + V''^2$, » il décrira encore la même courbe. »

Ces résultats ne sont que des corollaires d'un théorème général que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème. « Si plusieurs masses m, m', m'',... respectivement sou- » mises à l'action des forces F, F′, F″,..., et partant toutes d'un » point A avec des vitesses v_0, v'_0, v''_0,... de grandeur différente, mais de » même direction, décrivent la même courbe ACB ; la masse quelcon- » que M, soumise à l'action de la résultante des forces F, F′, F″,... » et partant du point A avec une vitesse V_0 ayant la même direction

» que les vitesses v_0, v'_0, v''_0,..., décrira encore la courbe ACB, pourvu
» que les forces F, F′, F″,... soient indépendantes du temps et que la
» force vive initiale MV_0^2 de la masse M soit égale à la somme

$$m v_0^2 + m' v'^2_0 + m'' v''^2_0 + \ldots$$

» des forces vives initiales des masses m, m', m'',... »

Démonstration. Afin d'abréger le discours, appelons mouvements partiels ceux qui sont produits par les forces F, F′, F″,..., agissant séparément, et mouvement composé celui que produit la résultante de ces forces.

Si le mobile M ne décrit pas la courbe ACB dans le mouvement composé, on pourra lui faire décrire cette courbe en joignant à la résultante des forces F, F′, F″,... une force normale convenablement choisie, et l'on aura alors les équations connues

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = X + X' + X'' + \ldots + N\cos\alpha = \Sigma X + N\cos\alpha,$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y' + Y'' + \ldots + N\cos\beta = \Sigma Y + N\cos\beta,$$

$$M \frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z' + Z'' + \ldots + N\cos\gamma = \Sigma Z + N\cos\gamma,$$

x, y, z représentant les coordonnées du mobile au bout du temps t, (X, Y, Z), (X′, Y′, Z′), (X″, Y″, Z″),... les composantes respectives prises parallèlement aux axes des forces F, F′, F″, ..., N l'intensité de la force normale, et α, β, γ les angles que la direction de cette force fait avec les parties positives des axes des coordonnées.

Multipliant la première équation par $2dx$, la seconde par $2dy$, la troisième par $2dz$, et ajoutant, il viendra

$$d.MV^2 = 2dx\,\Sigma X + 2dy\,\Sigma Y + 2dz\,\Sigma Z,$$

V étant la vitesse du mobile au point x, y, z; mais remarquons que v, v', v''..., étant les vitesses des masses m, m', m'',... au même point dans les mouvements partiels, on a

$$d.m v^2 = 2(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$
$$d.m' v'^2 = 2(X'\,dx + Y'\,dy + Z'\,dz),$$
$$d.m'' v''^2 = 2(X''dx + Y''dy + Z''dz),\ldots.$$

On a donc aussi,

$$d.MV^2 = d.mv^2 + d.m'v'^2 + d.m''v''^2 + \ldots = \Sigma d.mv^2 = d.\Sigma.mv^2,$$

d'où, intégrant,

$$MV^2 = C + \Sigma.mv^2,$$

ou simplement

$$MV^2 = \Sigma.mv^2,$$

en remarquant que, d'après l'hypothèse, cette égalité a lieu au point de départ.

Cela nous montre déjà que, dans toutes les positions comme dans la position initiale, la force vive de la masse M dans le mouvement que nous considérons, est égale à la somme des forces vives des masses m, m', m'',... dans les mouvements partiels.

Il est maintenant bien facile de prouver que la force N est nulle, et par conséquent que le mobile M parcourt la courbe ACB dans le mouvement composé. En effet, cette force est égale et contraire à la résultante de la force centrifuge et des composantes normales des forces F, F′, F″,...; or la force centrifuge dirigée en sens inverse du rayon de courbure de la courbe est, en appelant ρ ce rayon de courbure.

$$\frac{MV^2}{\rho},$$

ou, d'après ce que nous avons démontré,

$$\frac{mv^2}{\rho} + \frac{m'v'^2}{\rho} + \frac{m''v''^2}{\rho} + \ldots;$$

d'ailleurs les composantes normales des forces F, F′, F″,... sont respectivement égales et contraires à $\frac{mv^2}{\rho}$, $\frac{m'v'^2}{\rho}$, $\frac{m''v''^2}{\rho}$,..., puisque les masses m, m', m'',... décrivent la courbe ACB dans les mouvements partiels; il y a donc équilibre entre la force centrifuge et les composantes normales des forces extérieures; par conséquent, la force N est nulle.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, le point complétement libre; s'il était assujetti à rester sur une surface, le théorème serait encore vrai, car ce dernier cas se ramène au cas d'un point libre par l'introduction d'une force normale à la surface.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA LEMNISCATE,

PAR M. OSSIAN BONNET,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

« Soit une lemniscate dont le centre est à l'origine, et dont l'axe fait un angle de » 45 degrés avec l'axe des x; je dis que le temps que met un point matériel partant » du repos et soumis à l'action d'une force constamment dirigée en un point de l'axe » des x et proportionnelle à la distance, pour parcourir un arc quelconque de cette » lemniscate, compté à partir de l'origine, est égal au temps qu'il mettrait pour par- » courir la corde de cet arc, et que, de plus, la lemniscate est la seule courbe qui » jouisse de cette propriété [*]. »

Soient O le point de départ du mobile, A le centre de la force, et M la position du mobile au bout du temps t. Posons

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OM} = \rho, \quad \mathrm{MOA} = \theta;$$

le temps que mettra le mobile pour parcourir la corde OM sera, ainsi qu'on le voit aisément,

$$t_1 = \text{arc sin}\,\frac{\rho - a\cos\theta}{a\cos\theta} + \frac{\pi}{2},$$

et le temps qu'il mettra pour parcourir l'arc OM,

$$t_2 = \int \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}}{\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}}.$$

Si l'on veut que $t_1 = t_2$, il faudra que

$$d.\text{arc sin}\,\frac{\rho - a\cos\theta}{a\cos\theta} = \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}}{\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}},$$

ou

$$\frac{\cos\theta\, d\rho + \rho\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2},$$

d'où

$$2\,\text{tang}\,\theta\, d\rho = \rho d\theta\,(1 - \text{tang}^2\theta),$$

d'où

$$\sin 2\theta\, d\rho = \rho\cos 2\theta\, d\theta,$$

d'où

$$\rho^2 = c^2 \sin 2\theta,$$

ce qui est bien l'équation d'une lemniscate dont le centre est à l'origine et dont l'axe est la droite OB inclinée de 45 degrés sur OX.

[*] On a rappelé, à la page 28 de ce volume, une propriété de la lemniscate connue depuis bien longtemps, et qui ne diffère de la nôtre qu'en ce que le point matériel, au lieu d'être soumis à l'action d'une force centrale proportionnelle à la distance, est soumis à l'action de la pesanteur.

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES ISOTHERMES ORTHOGONALES;

PAR M. J. BERTRAND.

Les seuls cas particuliers où l'on ait déterminé la forme des surfaces isothermes ont présenté jusqu'ici une circonstance remarquable : je veux parler de l'existence de deux autres systèmes de surfaces coupant les premières à angle droit et orthogonales entre elles, qui peuvent également être considérées comme isothermes. Il m'a semblé utile d'examiner si ce fait peut être érigé en théorème général. La discussion de cette question fait l'objet principal des recherches suivantes.

Je démontre que le théorème en question conduirait à des résultats inadmissibles et qu'il existe certaines conditions sans lesquelles un système de surfaces isothermes ne saurait être conjugué à deux autres systèmes de surfaces isothermes orthogonales entre elles et aux premières. C'est par hasard que ces conditions se sont trouvées remplies dans les cas examinés jusqu'ici.

Les surfaces cylindriques, que je considère en particulier, satisfont toujours aux conditions établies pour des surfaces quelconques. Je démontre en effet que des cylindres isothermes sont toujours coupés orthogonalement par d'autres cylindres également isothermes. Ce théorème était déjà connu, il avait été donné par M. Lamé comme une conséquence analytique du caractère assigné par lui à un système de surfaces isothermes.

Je me suis aussi occupé des surfaces isothermes de révolution ; les surfaces orthogonales conjuguées sont, dans ce cas, des plans et d'autres surfaces de révolution dont les méridiens coupent à angle droit les méridiens des premières. J'ai trouvé qu'un système de surfaces isothermes de révolution étant donné, leurs trajectoires orthogonales de révolution ne peuvent être isothermes que dans le cas particulier où

leurs méridiens sont les bases de cylindres isothermes. Dans ce cas, les méridiens jouissent d'une propriété remarquable. Les courbes de l'un des systèmes sont coupées par leurs diverses trajectoires orthogonales en des points dont les distances à l'axe de révolution sont dans un rapport constant.

Je commencerai par établir directement les conditions connues pour qu'une série de surfaces puissent être isothermes. Ces conditions sont, comme M. Lamé l'a montré, une conséquence fort simple de l'équation de Fourier, et nous pourrions les prendre pour point de départ; mais il sera utile de les déduire de considérations analogues à celles qui serviront dans le reste du Mémoire.

I.

Considérons dans un corps en équilibre de température la série des surfaces isothermes; prenons sur l'une d'elles un élément superficiel ω, et par les différents points du contour de cet élément, faisons passer des courbes qui coupent à angle droit les surfaces considérées. Ces courbes formeront un canal dans lequel le mouvement de la chaleur s'effectuera indépendamment de ce qui se passe dans les autres parties du solide, car le flux de chaleur à travers ses parois sera, comme on sait, égal à zéro. Il faut par conséquent, pour l'équilibre, que les diverses tranches du canal soient traversées à chaque instant par la même quantité de chaleur. Soit s la longueur du canal comptee à partir de la surface sur laquelle a été pris l'élément ω. La ligne s peut servir à caractériser les diverses surfaces isothermes, car ces surfaces sont, par leur nature, déterminées dès que l'on connaît un de leurs points. Si V désigne la température de la surface qui correspond à l'arc s, et ω' l'élément intercepté sur cette surface par le canal, $\omega' \frac{dV}{ds}$ sera le flux à travers cet élément. Ce flux devant être constant, on aura

$$\omega' \frac{dV}{ds} = C,$$

d'où

$$dV = \frac{C ds}{\omega'}, \tag{1}$$

et

$$(2) \qquad V = C \int \frac{ds}{\omega'}.$$

Reste à déterminer ω' en fonction de s. Il semble évident que la loi de variation est indépendante de la forme donnée à la section qui sert de base au canal; c'est ce qui résultera d'ailleurs de la manière dont nous allons la calculer.

Quelque petite que soit la surface par les points de laquelle on mène les trajectoires orthogonales, cette surface peut être décomposée en un nombre infini de rectangles infiniment petits par rapport à elle-même. Supposons ces rectangles déterminés par les intersections des lignes de courbure de la surface, et considérons un filet normal aux surfaces isothermes, et ayant pour base l'un d'entre eux, cherchons l'accroissement de la section lorsqu'on passe d'une surface isotherme à une autre infiniment voisine. Toutes les sections seront, comme on sait, des rectangles infiniment petits. Soient α et β les côtés de l'un d'entre eux, R et r les rayons principaux de la surface sur laquelle il se trouve, et enfin ds la distance à la surface infiniment voisine. On aura évidemment

$$\alpha + d\alpha : \alpha :: R + ds : R,$$

$$\beta + d\beta : \beta :: r + ds : r,$$

d'où

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{R}. \quad d\beta = \frac{\beta ds}{R};$$

et, par suite, le rectangle, qui était $\alpha\beta$, devient

$$(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta) = \alpha\beta\left(1 + \frac{ds}{R} + \frac{ds}{r}\right);$$

il augmente donc proportionnellement à la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$, somme que nous appellerons, avec Mlle Sophie Germain, courbure de la surface au point considéré.

Chacun des rectangles augmentant dans le rapport trouvé ci-dessus, il en sera de même de l'élément ω, et nous pourrons écrire

$$(3) \qquad d\omega = \omega ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{d\omega}{\omega} = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

$$(4) \qquad \omega = C_1 e^{\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)};$$

remettant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$(5) \qquad V = \frac{C}{C_1}\int ds\, e^{-\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)}.$$

Cette formule permet de calculer la température d'un point quelconque lorsqu'on connaît la loi de variation de la courbure le long d'une ligne perpendiculaire aux diverses surfaces. Elle apprend, par conséquent, conformément à ce qu'on devait prévoir, que des surfaces choisies au hasard ne peuvent pas être considérées comme isothermes, car en prenant diverses trajectoires orthogonales on trouverait des valeurs différentes de la température aux différents points d'une même surface.

Il est facile de déduire de la formule (5) la condition nécessaire pour que des surfaces données puissent être isothermes; il faut que, s et s' désignant les longueurs des deux trajectoires orthogonales différentes, comptées entre les deux mêmes surfaces, on ait

$$(6) \qquad \int_0^s ds\, e^{-\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} = \int_0^{s'} ds'\, e^{-\int_0^{s'} ds\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)}.$$

Différentions les deux membres en prenant pour variable indépendante un parametre quelconque λ, il vient

$$(7) \qquad \frac{ds}{d\lambda} e^{-\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} = \frac{ds'}{d\lambda} e^{-\int_0^{s'} ds'\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)}.$$

Prenons les logarithmes

$$(8) \qquad \mathrm{l}\frac{ds}{d\lambda} - \int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) = \mathrm{l}\frac{ds'}{d\lambda} - \int_0^{s'} ds'\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right).$$

Si nous différentions une seconde fois, il vient

$$(9)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) = \frac{\frac{d^2s'}{d\lambda^2}}{\frac{ds'}{d\lambda}} - \frac{ds'}{d\lambda}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{r'}\right),$$

et, par suite, le premier membre, c'est-à-dire

$$(10)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

ne doit dépendre que de la surface que l'on considère, c'est-à-dire qu'il doit être une certaine fonction du paramètre λ. Il est facile de faire coïncider ce résultat avec celui de M. Lamé. λ étant, en effet, le paramètre qui distingue les surfaces les unes des autres, on peut concevoir leur équation résolue par rapport à λ. Soit

$$(11)\qquad \varphi(x, y, z) = \lambda$$

cette équation. La distance ds de deux surfaces infiniment voisines s'exprime facilement au moyen de $d\lambda$. Supposons, en effet, que l'on prenne sur la normale à l'une des surfaces une longueur infiniment petite ds; si x, y, z sont les coordonnées du point par lequel cette normale est menée, les coordonnées de l'extrémité seront

$$x + \frac{ds\,\frac{d\lambda}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},\quad y + \frac{ds\,\frac{d\lambda}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

$$z + \frac{ds\,\frac{d\lambda}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}};$$

et, par conséquent, l'accroissement de λ, lorsque l'on passera de la surface à laquelle appartient le point x, y, z, à celle qui passe par l'extrémité de notre petite normale ds, sera

$$\frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz = ds\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2};$$

d'où l'on tire

$$(12)\qquad ds = \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}};$$

la différentiation donne

$$\frac{d^2s}{d\lambda^2} = -\frac{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{2\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais on a

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = 2\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dx^2} \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 = \frac{d}{dy}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = 2\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dy^2} \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = 2\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dz^2} \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

et, par suite,

$$(13)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} = -\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dx^2} + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]^2}.$$

En calculant d'après les formules connues la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$, on trouve qu'elle est égale à

$$\frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\lambda}{dy^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

et en substituant dans l'expression (10), on voit que les surfaces ne seront isothermes que dans le cas où le rapport

$$\frac{\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\lambda}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

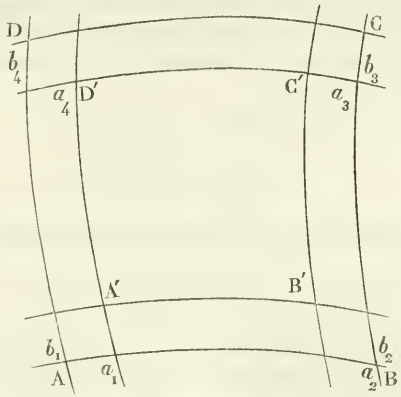
sera une fonction du seul paramètre λ. Réciproquement, si cette condition est remplie, la formule (4) donnera un état calorifique qui, une fois établi, se maintiendra indéfiniment, puisque tous les éléments des différents canaux gagneront à chaque instant autant de chaleur qu'ils en perdront.

II.

Un système de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres étant donné, elles ont toujours deux séries de surfaces trajectoires orthogonales qui les coupent suivant leurs lignes de courbure; dans les cas examinés jusqu'ici en prenant pour surfaces primitives des surfaces isothermes, il s'est trouvé que les surfaces orthogonales étaient aussi isothermes; il est important de savoir si ce fait peut être érigé en théorème général. Pour nous assurer qu'il n'en est pas ainsi, nous emploierons la méthode si connue de démonstration par l'absurde, qui consistera ici à admettre d'abord le théorème, pour en déduire des conséquences dont quelques-unes ne seront pas exactes.

Considérons trois séries de surfaces isothermes orthogonales, et soit ABCD un rectangle curviligne de dimensions finies, formé sur l'une d'elles par quatre lignes de courbure, *fig.* 1; menons quatre lignes de

Fig. 1.



courbure respectivement très-voisines des quatre premières, de ma-

niere à former aux quatre sommets A, B, C, D, quatre rectangles infiniment petits, dont je désignerai les côtés par $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$; soient i_1, i_2, i_3, i_4 les distances comptées sur les normales aux points A, B, C, D, entre la surface considérée et la surface infiniment voisine.

Puisque, par hypothèse, les surfaces normales à ABCD, et dont l'une a AD pour trace, sont des surfaces isothermes, on peut concevoir sur chacune de ces surfaces une température telle qu'il y ait équilibre calorifique, et telle, par conséquent, qu'en considérant le filet compris entre la surface ABCD, la surface voisine appartenant au même système et les deux surfaces orthogonales à celle-là passant par BA et B'A', les sections faites sur ce filet par les deux surfaces AD et CB soient traversées par les mêmes quantités de chaleur. Si donc dV_1 désigne la différence de température entre les points de la surface AD et ceux de la surface A'D', et dV_2 la différence analogue pour les surfaces BC et B'C', on aura, d'après l'expression connue du flux,

$$(a) \qquad \frac{b_1 i_1 dV_1}{a_1} = \frac{b_2 i_2 dV_2}{a_2},$$

$$(b) \qquad \frac{b_3 i_3 dV_2}{a_3} = \frac{b_4 i_4 dV_1}{a_4}.$$

On aura, par des considérations analogues, en remarquant que les surfaces AB, CD sont, par hypothèse, isothermes, et désignant par dV'_1, dV'_2 les accroissements de température qui auraient lieu dans l'état d'équilibre, si l'on passait de la surface AB à la surface A'B' et de la surface C'D' à la surface CD,

$$(c) \qquad \frac{a_1 i_1 dV'_1}{b_1} = \frac{a_4 i_4 dV'_2}{b_4},$$

$$(d) \qquad \frac{a_3 i_3 dV'_2}{b_3} = \frac{a_2 i_2 dV'_1}{b_2}.$$

Ces quatre équations étant multipliées membre à membre, donnent

$$(e) \qquad i_1^2 i_3^2 = i_2^2 i_4^2,$$

$$(f) \qquad i_1 : i_2 :: i_4 : i_3.$$

Nous avons donc ce théorème :

Dans un système de surfaces isothermes orthogonales, si sur l'une quelconque des surfaces on considère un rectangle de dimensions finies,

formé par quatre lignes de courbure, les distances des quatre sommets de ce rectangle à la surface infiniment voisine de celle qui le renferme, formeront une proportion.

D'après cela, si l'on admettait qu'une série de surfaces isothermes eût toujours des trajectoires orthogonales isothermes, il en résulterait que l'une des surfaces isothermes d'un corps étant connue, ainsi que les distances à la surface infiniment voisine le long de deux lignes de courbure perpendiculaires l'une à l'autre, on pourrait déterminer la valeur de cette distance pour un point quelconque pris sur la surface; il suffirait, en effet, de faire passer deux lignes de courbure par le point considéré, et la distance cherchée serait une quatrième proportionnelle à celles qui correspondent aux trois autres sommets du rectangle formé par ces lignes et par les deux premières. Mais cette conséquence est inadmissible; on sait, en effet, qu'il est toujours possible de se donner deux surfaces isothermes consécutives arbitrairement, et que la loi des températures dans le reste du corps est alors déterminée.

Le théorème exprimé par l'équation (f) est relatif à deux surfaces isothermes infiniment voisines, mais on peut en déduire un autre, qui donne une propriété commune à toutes les surfaces qui peuvent entrer dans un système de surfaces orthogonales triplement isotherme. Considérons sur l'une des surfaces deux lignes de courbure orthogonales AB, AC, *fig.* 2, et deux lignes voisines A′B′, A′C′; on peut évidemment con-

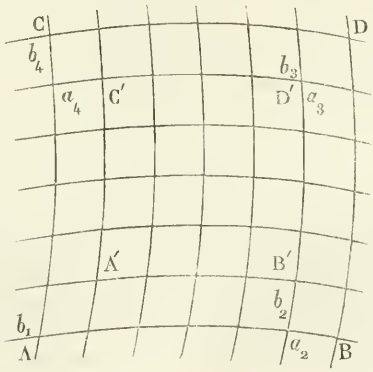


Fig. 2.

struire des lignes de courbure infiniment rapprochées de telle manière que les rectangles compris entre deux lignes consécutives et les courbes AB, A'B' soient tous semblables entre eux. On pourra également concevoir des lignes de courbure perpendiculaires à AC qui divisent la bande infiniment étroite comprise entre AC et A'C' en rectangles semblables entre eux et semblables aussi aux précédents. Les différentes lignes qui déterminent ces rectangles étant prolongées, décomposent la surface considérée en éléments infiniment petits, et je dis que ces éléments seront tous des rectangles semblables entre eux.

Considérons, par exemple, le rectangle DD'; si tous ceux qui sont compris entre AB, A'B', AC, A'C', sont semblables entre eux, il sera semblable à chacun d'eux.

Désignons par (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) les côtés des quatre rectangles (AA'), (BB'), (DD'), (CC'), et soient i_1, i_2, i_3, i_4 les distances des surfaces infiniment voisines comptées aux points A, B, C, D; l'équilibre du canal AC, A'C', dans le corps qui aurait ses surfaces isothermes perpendiculaires à ABCD et passant par AB, A'B', exige que l'on ait

$$(g) \qquad \frac{a_1 i_1 dV_1}{b_1} = \frac{a_4 i_4 dV_2}{b_4},$$

on aura de meme

$$(h) \qquad \frac{a_2 i_2 dV_1}{b_2} = \frac{a_3 i_3 dV_2}{b_3}.$$

Si donc

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_4}{b_4},$$

on tire de là, en ayant égard à la proportion

$$i_1 : i_2 :: i_4 : i_3,$$

$$(i) \qquad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Nous avons donc ce théorème :

Toute surface susceptible de faire partie d'un système de surfaces orthogonales isothermes jouit de la propriété de pouvoir être découpée par ses lignes de courbure en rectangles semblables entre eux. Le rapport des côtés de ces rectangles peut être choisi arbitrairement, et l'on peut faire en sorte, par exemple, qu'ils soient tous des carrés.

L'ellipsoïde pouvant toujours entrer dans un système de surfaces isothermes orthogonales, jouit de la propriété précédente, et peut être divisé en carrés par ses lignes de courbure.

III.

Lorsque les surfaces isothermes d'un corps sont cylindriques, les surfaces orthogonales conjuguées sont d'autres cylindres et des plans perpendiculaires aux génératrices; pour que deux séries de cylindres orthogonaux soient toutes deux isothermes, il faut, d'après ce que nous venons de dire, que les traces de ces cylindres sur les plans perpendiculaires à leurs génératrices, ou, en d'autres termes, que les bases de ces cylindres forment des rectangles semblables entre eux, pourvu, bien entendu, que ces bases soient convenablement espacées.

Il est facile de voir que cette condition sera toujours remplie et qu'elle est même nécessaire et suffisante pour que les premiers cylindres soient isothermes.

Si nous considérons, en effet, la propagation de la chaleur dans un plan, soient A, A′, A″ une série de lignes isothermes, *fig.* 3, B, B′, B″

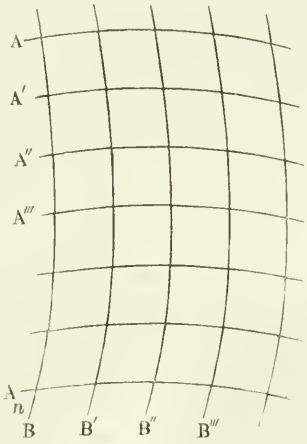


Fig. 3.

leurs trajectoires orthogonales; considérons le mouvement de la chaleur dans le filet compris entre B et B'. A et A_4 étant deux lignes isothermes quelconques, si ω est la portion de A interceptée dans le filet BB', et ω_4 la portion correspondante de A_4, en désignant par dV_1 l'accroissement de température lorsque l'on passe de A à la courbe voisine, et par dV_4 l'accroissement correspondant pour la ligne A_4; et enfin, en nommant i_1 et i_4 les portions de la ligne B comprises entre les mêmes courbes, on aura

$$\alpha \qquad \frac{\omega dV}{i_1} = \frac{\omega_4 dV_4}{i_4}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{i_1} = \frac{\omega_4}{i_4} :: dV_4 : dV;$$

si ω', ω'_4, i'_1, i'_4 sont les quantités analogues à ω, ω_4, i_1, i_4, pour un autre filet quelconque orthogonal aux lignes A_1, A_2,..., on aura

$$\beta \qquad \frac{\omega'}{i'} : \frac{\omega'_4}{i'_4} :: dV_4 : dV,$$

donc

$$\gamma \qquad \frac{\omega}{i_1} : \frac{\omega_4}{i_4} :: \frac{\omega'}{i'_1} : \frac{\omega'_4}{i'_4}.$$

Si, par conséquent,

$$\frac{\omega}{i_1} = \frac{\omega'}{i'_1} = \frac{\omega_4}{i_4},$$

$\frac{\omega_4}{i_4}$ sera égal à chacun de ces trois rapports. Il en résulte que si l'on choisit les lignes A, A',..., et les trajectoires B, B',... de manière que les rectangles compris entre A, A',... et ceux compris entre B, B',... soient semblables entre eux, ce qui évidemment est toujours possible, il arrivera que tous les autres rectangles seront semblables à ceux-là, et par conséquent semblables les uns aux autres.

Réciproquement, si l'on a sur un plan une série de lignes se coupant toutes à angle droit, si tous les rectangles formés par leurs intersections sont semblables entre eux, un quelconque des systèmes peut être considéré comme composé de lignes isothermes.

Soient, en effet, les lignes A, A',..., A_4, B, B',..., B_4, *fig.* 3; si nous supposons isothermes les lignes A, A',..., A_4, la température en un point de chacune d'elles pourra être déterminée par la considération

du mouvement de la chaleur dans un canal compris entre deux courbes voisines B, B′. La condition pour que les lignes A, A′,... puissent être isothermes est, comme nous l'avons expliqué plus haut, que ces calculs, faits successivement pour les différents filets, conduisent aux mêmes résultats. C'est précisément ce qui arrivera ici, car la condition qui donne, dans un filet, l'accroissement de température quand on passe d'une courbe à la suivante, est

$$\frac{\omega dV}{i} = C.$$

Si donc $\frac{\omega}{i}$ est constant pour tous les filets, on pourra déterminer, pour chacun d'eux, la constante arbitraire C de manière à rendre aussi dV constant, et indépendant du filet considéré.

Nous retombons ainsi sur ce théorème, déjà démontré par M. Lamé :

A un système de courbes planes isothermes, ou, si l'on veut, de cylindres isothermes, correspondent toujours des trajectoires orthogonales isothermes.

Si les surfaces isothermes sont de révolution, les surfaces orthogonales conjuguées doivent les couper suivant les méridiens et des parallèles; ce sont, par conséquent, des plans passant par l'axe de révolution et d'autres surfaces de révolution dont les méridiens coupent à angle droit ceux des premières. Si nous admettons que ces trois séries de surfaces soient à la fois isothermes, il faudra, d'après notre théorème, que deux quelconques d'entre elles puissent tracer sur la troisième des rectangles semblables entre eux. Par conséquent, les méridiens des surfaces de révolution doivent former, si on les dispose convenablement, des rectangles semblables entre eux; ce sont donc les bases de cylindres isothermes.

Nous avons donc ce théorème :

Des surfaces isothermes de révolution ne peuvent avoir pour trajectoires orthogonales conjuguées d'autres surfaces isothermes que dans le cas où leurs méridiens forment un système de lignes isothermes.

Lorsque cette condition sera remplie, il faudra, en vertu de l'équation (f) du § II, qu'en considérant un rectangle de dimensions finies formé par quatre méridiens, les distances des quatre sommets de ce

rectangle au plan méridien infiniment voisin forment les quatre termes d'une proportion. Mais ces distances sont proportionnelles aux rayons des parallèles correspondants aux quatre points.

Nous avons donc ce théorème :

Deux systèmes de lignes isothermes orthogonales étant donnés, pour que leur rotation autour d'un axe engendre des surfaces de révolution isothermes, il faut que les distances à l'axe des quatre sommets d'un rectangle formé par les lignes données soient les quatre termes d'une proportion.

On peut vérifier que cette condition est remplie par un système de sections coniques homofocales; les lignes sont, comme on sait, isothermes, et leur révolution autour de leurs axes engendre des surfaces isothermes; si donc on prend un rectangle formé par deux hyperboles et deux ellipses, les ordonnées de ses quatre sommets doivent former une proportion. C'est précisément ce qui résulte d'un théorème de M. Chasles, d'après lequel une même hyperbole coupe toutes les ellipses en des points *correspondants* dont les ordonnées sont dans un rapport constant avec les axes des ellipses sur lesquelles ils se trouvent.

IV.

J'indiquerai le moyen de déduire des propositions précédentes quelques théorèmes de géométrie pure relatifs à l'ellipsoïde.

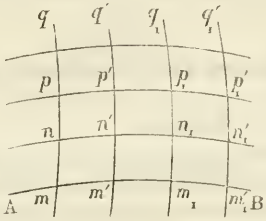
Si l'on considère un système de surfaces isothermes, nous avons vu, § Ier, que la fonction

$$(\alpha)\qquad \frac{\dfrac{d^2s}{d\lambda^2}}{\dfrac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

dans laquelle s, λ, R, r conservent la signification indiquée dans ce paragraphe, doit avoir la même valeur pour tous les points d'une même surface. λ désigne un paramètre quelconque dont la valeur puisse caractériser les diverses surfaces isothermes, et nous pouvons évidemment le choisir de manière à rendre carrés tous les rectangles compris entre deux courbes trajectoires orthogonales aux diverses surfaces isothermes

menées par deux points infiniment voisins m, m', *fig.* 4, d'une même ligne

Fig. 4.



de courbure, et les surfaces qui correspondent à des accroissements égaux de λ. Cela étant, si par deux autres points voisins m_1, m'_1, on mène des trajectoires orthogonales aux surfaces isothermes, et que la distance de ces points soit tellement choisie que le rectangle $m_1 m'_1 n_1 n'_1$ soit carré, il résulte des propositions démontrées plus haut, que, dans le cas du système triplement isotherme, tous les rectangles n_1, p_1, n'_1, p'_1, etc., se trouveront aussi des carrés.

Par conséquent, les quantités ds, d^2s qui entrent dans la formule (α), peuvent s'exprimer au moyen des côtés $m_1 m'_1$, $n_1 n'_1$, $p_1 p'_1$. On a évidemment

$$ds = m_1 m'_1,$$
$$ds + d^2s = n_1 n'_1.$$

Mais en remarquant que les tangentes aux courbes $m_1 n_1$, $m'_1 n'_1$ vont se rencontrer à celui des centres de courbure de la surface qui correspond à la ligne de courbure AB, on a

$$\frac{n_1 n'_1}{m_1 m'_1} = \frac{R + ds}{R},$$

d'où

$$(\beta) \qquad \frac{n_1 n'_1 - m_1 m'_1}{m_1 m'_1} = \frac{d^2s}{ds} = \frac{ds}{R},$$

et par conséquent

$$(\gamma) \qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} = \frac{\frac{ds}{d\lambda}}{R},$$

ce qui, substitué dans l'expression (α), la réduit à

$$(\delta) \qquad \frac{ds}{d\lambda}\frac{1}{r};$$

par suite, cette expression doit être constante pour tous les points de la ligne AB.

Nous avons donc ce théorème :

Dans un système de surfaces isothermes orthogonales sur une même surface et sur une même ligne de courbure, la distance de deux surfaces infiniment voisines varie proportionnellement au rayon de courbure correspondant aux lignes de courbure de l'autre système.

On sait d'ailleurs que la distance de deux surfaces est réciproquement proportionnelle au flux de chaleur. Par conséquent,

Le flux de chaleur varie, sur une même ligne de courbure, en raison inverse du rayon de courbure correspondant à la ligne de l'autre système.

Si l'on rapproche ce théorème de l'un de ceux qui ont été indiqués plus haut, savoir, que les flux de chaleur aux quatre sommets d'un rectangle formé par quatres lignes de courbure sont en proportion, on aura le théorème suivant :

Si sur une surface du second ordre on considère un rectangle formé par quatre lignes de courbure, quatre des rayons de courbure de la surface, correspondants aux sommets de ce rectangle, forment une proportion. Les quatre autres rayons de courbure forment de même une proportion, et, par suite, le produit de quatre d'entre eux pris dans un certain ordre est égal au produit des quatre autres.

Ce dernier théorème présente quelque analogie avec des propositions récemment démontrées dans le Journal de M. Crelle [*].

---

[*] Voyez un Memoire de M. Joachimstahl, Journal de M. Crelle, t. XXVI, p. 155.

MÉMOIRE
SUR LA THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. J. BERTRAND.

Les théorèmes généraux d'Euler et de Monge sur la théorie des surfaces me paraissent les plus belles propositions connues de la géométrie, parce qu'elles en sont les plus générales. Ces lois si simples et si élégantes de la courbure des surfaces, démontrées indépendamment de la définition particulière de la surface dont on s'occupe, sont en même temps éminemment propres à faire comprendre le véritable esprit de la méthode si féconde des infiniment petits et de la loi de continuité transportée de l'analyse à la géométrie; mais, pour mettre bien nettement en évidence la nature de ces beaux théorèmes, je crois utile de les présenter d'une manière un peu différente de celle que l'on adopte ordinairement.

Tous deux expriment une propriété générale des normales à une même surface et pourraient s'énoncer sans que l'on fît intervenir la surface elle-même ou ses sections par différents plans; mais, bien différentes en cela l'une de l'autre, la première proposition, celle d'Euler, qui apprend que deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre ont la somme de leurs courbures constante, est une véritable identité; elle résulte uniquement de la loi de continuité, et ne peut servir en rien à caractériser les normales à une même surface; si, comme cela est très-facile, on fait disparaître de son énoncé les mots de *surface* et de *sections planes*, on obtient un théorème qui s'applique à des droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, pourvu que leurs directions soient exprimées par des fonctions continues.

Le théorème de Monge, au contraire, l'existence de deux directions

perpendiculaires suivant lesquelles deux normales se rencontrent, est essentiellement particulier à des droites normales à une même surface, et il n'existe pas de proposition correspondante pour des lignes droites distribuées au hasard dans l'espace.

Ce beau théorème de Monge suffit, comme je le fais voir, pour caractériser complétement les surfaces, dont il est ainsi la propriété la plus générale; mais on peut lui-même le généraliser et le rendre plus propre aux applications. J'ai été, en effet, conduit au théorème suivant, dont celui de Monge n'est évidemment qu'un cas particulier :

Si en un point quelconque A, *pris sur une surface, on mène une normale* AZ, *puis que, par le point* A, *on fasse passer sur la surface deux lignes perpendiculaires sur lesquelles on prenne des longueurs infiniment petites égales* AB, AC, *la normale au point* B *fera avec le plan* ZAB *un angle égal à celui que la normale au point* C *forme avec le plan* ZAC; *j'ajouterai que les deux normales seront toutes deux dans l'intérieur de l'angle dièdre* BAC, *ou toutes deux en dehors de cet angle.*

Je donne aussi, dans ce Mémoire, une proposition qui peut être considérée comme le complément de celles d'Euler, et qui, jointe avec elles, caractérise de la manière la plus complète la loi de variation des normales à une surface autour d'un même point.

Euler a fait connaître, en effet, la loi de variation de la courbure des sections normales, c'est-à-dire, en adoptant les lettres employées dans l'énoncé du théorème précédent, la manière dont la projection de la normale au point B sur le plan ZAB s'incline sur la normale primitive ZA. Mais, pour connaître en chaque point la position de cette normale, il ne suffit pas de pouvoir déterminer sa projection sur un plan connu, il faut encore connaître l'angle qu'elle forme avec cette projection. Cet angle est soumis à une loi de variation très-simple exprimée par le théorème suivant :

Si AZ *est la normale à une surface en un point quelconque* A, *que* AP, AQ *désignent les directions des deux lignes de courbure en ce point, si dans une direction* AB *on prend sur la surface une longueur infiniment petite* AB, *la normale au point* B, *ainsi obtenu, fera, avec*

le plan ZAB, *un angle exprimé par la formule suivante :*

$$\frac{AB}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\sin 2\alpha,$$

R *et r désignant les deux rayons de courbure correspondants aux lignes* AP, AQ, *et* α *l'angle* BAQ.

Le premier des deux théorèmes que nous avons énoncés est une conséquence immédiate du second.

Ces nouvelles propriétés des surfaces expriment sous une forme assez commode la condition nécessaire pour que des droites soient normales à une série de surfaces; il suffit, comme je le fais voir, que la propriété exprimée par le premier de mes nouveaux théorèmes soit vérifiée pour deux directions perpendiculaires prises à partir de chaque point de l'espace: cela étant, elle sera nécessairement vraie pour toutes les autres directions.

Cette définition simple des normales à une même surface m'a permis de démontrer géométriquement deux beaux théorèmes de M. Dupin, et de retrouver des résultats auquels M. Sturm était parvenu par l'analyse.

Le premier des deux théorèmes de M. Dupin est relatif aux surfaces orthogonales; il consiste en ce que trois séries de surfaces orthogonales se coupent toujours suivant leurs lignes de courbure. J'en donne une démonstration plus simple que celles qui avaient été proposées jusqu'ici.

La seconde application des résultats obtenus dans ce Mémoire est relative à l'optique.

Malus a démontré que des rayons de lumière partis d'un même point et réfléchis par une surface quelconque restent, après leur réflexion, normaux à une même série de surfaces. Cette proposition de Malus a été généralisée par M. Charles Dupin, elle s'applique non-seulement à des rayons partis d'un même point, mais à des rayons dirigés d'une manière quelconque; pourvu qu'ils soient normaux à une même surface, ils conservent cette propriété après avoir été réfléchis ou réfractés d'une manière quelconque, et quelle que soit la surface de séparation des deux milieux. Je donne une démonstration géomé-

trique de tous ces théorèmes, et j'indique même la loi la plus générale de réfraction qui puisse les laisser subsister.

M. Sturm, qui s'est occupé des mêmes questions, a donné des formules générales qui permettent de calculer les rayons de courbure et la position des sections principales de la surface normale aux rayons réfractés, pourvu que l'on connaisse les éléments analogues, tant pour la surface normale aux rayons incidents que pour la surface de séparation des milieux. Je suis parvenu géométriquement à des formules analogues à celles de M. Sturm, et qui pourront remplir le même but.

I.

1. Soient A un point pris sur une surface, et AZ la direction de la normale en ce point. Prenons pour axe des z cette droite AZ, et pour axes des x et des y, des perpendiculaires choisies au hasard dans le plan tangent; l'équation de la surface étant

$$z = \varphi(x, y),$$

les angles que fait la normale avec les trois axes auront des cosinus respectivement proportionnels aux quantités

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \text{et} \quad 1,$$

et on peut les représenter par

$$\lambda p, \quad \lambda q, \quad \lambda.$$

Si, sur les axes des X et des Y, on prend à partir du point A deux longueurs infiniment petites égales AB, AC, les points B et C ainsi obtenus pourront être considérés comme étant sur la surface, et il est facile de calculer les cosinus des angles que les normales en ces deux points forment avec les axes.

Les angles relatifs à la normale au point B auront pour cosinus

$$\frac{d.\lambda p}{dx}.\mathrm{AB}, \quad \frac{d.\lambda q}{dx}.\mathrm{AB}, \quad 1,$$

et ceux que forme la normale au point C,

$$\frac{d.\lambda p}{dy}.\mathrm{AC},\quad \frac{d.\lambda q}{dy}.\mathrm{AC},\quad 1.$$

En remarquant que p et q sont nuls pour les points considérés, ces cosinus deviennent : Pour le point B,

$$\lambda\frac{dp}{dx}.\mathrm{AB},\quad \lambda\frac{dq}{dx}.\mathrm{AB},\quad 1;$$

pour le point C,

$$\lambda\frac{dp}{dy}.\mathrm{AC},\quad \lambda\frac{dq}{dy}.\mathrm{AB},\quad 1.$$

Mais on a, comme on sait,

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}.$$

Si donc AB est, conformément à notre hypothèse, égal à AC, l'angle que la normale en B fera avec l'axe des y sera le même que celui de la normale en C avec l'axe des x; ou, ce qui revient au même, *la normale en* B *est inclinée sur le plan* ZAB *de la même quantité que la normale en* C *sur le plan* ZAC.

2. Les cosinus $\lambda\frac{dp}{dy}.\mathrm{AC}$, $\lambda\frac{dq}{dx}.\mathrm{AB}$ étant égaux et de même signe, il en résulte que les deux normales sont toutes deux dans l'angle dièdre BAC, ou toutes deux en dehors de cet angle; c'est-à-dire que si l'une des deux est à gauche de la section normale qui passe par son point de départ, l'autre sera à droite, et réciproquement; d'où l'on conclut, en vertu de la loi de continuité, qu'il doit nécessairement exister une direction intermédiaire à AB et AC, telle que la normale correspondante soit dans le plan normal mené suivant cette direction. Si c'est la direction AD qui jouit de cette propriété, notre théoreme fait voir qu'il en sera de même de la direction perpendiculaire AD′, et par suite, qu'il existe en chaque point d'une surface deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, et telles que les normales infiniment voisines du point considéré et menées dans la direction de ces deux lignes rencontrent la normale primitive.

3. Les cosinus des angles que la normale au point B forme avec l'axe des X et la normale au point C forme avec l'axe des Y, peuvent être considérés, aux infiniment petits près du second ordre, comme égaux aux angles que les projections de ces normales sur les plans ZAB, ZAC, forment avec l'axe des Z; c'est-à-dire que ces cosinus, divisés respectivement par les longueurs infiniment petites AB, AC, peuvent être considérés comme représentant les courbures des sections normales ZAB, ZAC.

On a donc, en nommant ces courbures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$,

$$\frac{1}{R} = \frac{d.\lambda p}{dx}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{d.\lambda p}{dy}.$$

4. Supposons maintenant que, sans changer l'axe des Z, on prenne pour axes des X et des Y deux nouvelles lignes AX′, AY′ perpendiculaires l'une à l'autre et situées dans le plan tangent. Si α désigne l'angle des axes XX′, on aura les formules de transformation suivantes :

$$x = y' \sin\alpha + x' \cos\alpha, \qquad x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y = y' \cos\alpha - x' \sin\alpha, \qquad y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha;$$

et par suite, en nommant p', q', λ' les quantités que nous appelions p, q, λ dans l'ancien système d'axes,

$$p' = \frac{dz}{dx'} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dx'} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx'} = p\cos\alpha - q\sin\alpha,$$
$$q' = \frac{dz}{dy'} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy'} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dy'} = p\sin\alpha + q\cos\alpha,$$
$$\lambda'^2 = (p'^2 + q'^2 + 1)^{-1} = (p^2 + q^2 + 1)^{-1} = \lambda^2.$$

Il résulte de là que l'on a, en nommant R′, r' les rayons de courbure des sections normales menées suivant les axes des x' et des y',

$$\begin{aligned}\frac{1}{R'} &= \frac{d.\lambda' p'}{dx'} = \cos\alpha\,\frac{d.\lambda p}{dx'} - \sin\alpha\,\frac{d.\lambda q}{dx'}\\ &= \cos\alpha\left(\frac{d.\lambda p}{dx}\,\frac{dx}{dx'} + \frac{d.\lambda p}{dy}\,\frac{dy}{dx'}\right) - \sin\alpha\left(\frac{d.\lambda q}{dx}\,\frac{dx}{dx'} + \frac{d.\lambda q}{dy}\,\frac{dy}{dx'}\right)\\ &= \cos\alpha\left(\frac{1}{R}\cos\alpha - \frac{d.\lambda p}{dy}\sin\alpha\right) - \sin\alpha\left(\frac{d.\lambda q}{dx}\cos\alpha - \frac{1}{r}\sin\alpha\right);\end{aligned}$$

on trouvera de même

$$\frac{1}{r'} = \frac{d.\lambda' q'}{dy'} = \sin\alpha \frac{d.\lambda p}{dy'} + \cos\alpha \frac{d.\lambda q}{dy'}$$
$$= \sin\alpha \left(\frac{1}{r}\sin\alpha + \frac{d.\lambda p}{dy}\cos\alpha\right) + \cos\alpha \left(\frac{d.\lambda q}{dx}\sin\alpha + \frac{1}{R}\cos\alpha\right);$$

en ajoutant, il vient

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Si l'on suppose que les axes primitifs des x et des y soient dans la direction des lignes de courbure dont l'existence a été démontrée plus haut, on aura

$$\frac{d.\lambda p}{dy} = 0, \qquad \frac{d.\lambda q}{dx} = 0,$$

et par suite

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha + \frac{1}{r}\sin^2\alpha,$$
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R}\sin^2\alpha + \frac{1}{r}\cos^2\alpha.$$

Ce sont les formules connues qui donnent les courbures des sections normales.

5. Étudions maintenant la loi de variation de l'angle formé par la normale en un point avec la section suivant AZ menée par ce point. Cet angle, qui, comme nous l'avons vu, a la même valeur pour deux points équidistants de A pris dans deux directions rectangulaires, est représenté par

$$AB.\frac{d.\lambda p}{dy} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d.\lambda q}{dx}.AC.$$

Si nous cherchons les valeurs pour les points situés à une distance égale sur les axes des x' et des y', il faut calculer

$$AB.\frac{d.\lambda p'}{dy'}.$$

Or on a, puisque $p' = 0$,

$$\frac{d.\lambda p'}{dy'} = p'\frac{d\lambda}{dy'} + \lambda\frac{dp'}{dy'} = \lambda\frac{dp'}{dy'} = \lambda\cos\alpha\frac{dp}{dy'} - \lambda\sin\alpha\frac{dq}{dy'}$$
$$= \lambda\cos\alpha\left(\frac{dp}{dx}\sin\alpha + \frac{dp}{dy}\cos\alpha\right) - \lambda\sin\alpha\left(\frac{dq}{dy}\cos\alpha + \frac{dq}{dx}\sin\alpha\right).$$

Si donc on a pris pour AX et AY les directions des lignes de courbure, en sorte que l'on ait

$$\frac{dp}{dy} = 0, \qquad \frac{dq}{dx} = 0,$$

il vient

$$\frac{d\psi}{dr} = \cos\alpha \sin\alpha \left(\lambda \frac{dp}{dx} - \lambda \frac{dq}{dy}\right) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right);$$

en sorte que l'angle cherché a cette expression très-simple

$$\frac{1}{2} AB . \sin 2\alpha . \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

ce qui apprend que la normale à la surface, qui pour les points des sections principales est située dans le plan de la section, s'incline sur cette section, pour les points infiniment voisins du point A, suivant une loi indépendante de la nature de la surface considérée. Le maximum a lieu pour la direction inclinée à 45 degrés sur celles des sections principales : il est proportionnel à la différence des courbures de la surface.

II.

1. Les formules précédentes font connaître la loi très-simple suivant laquelle varient, autour d'un même point, les positions des normales à une même surface. Des droites prises au hasard dans l'espace ne pourraient pas, en général, être normales à une même surface ; et leur loi de variation n'est pas soumise à toutes les conditions du paragraphe précédent. Nous allons chercher, parmi ces conditions, quelles sont celles que l'on peut considérer comme suffisantes pour caractériser les normales d'une surface.

Soient X, Y, Z les fonctions des trois variables x, y, z, représentant les trois cosinus des angles qu'une droite partant du point dont x, y, z sont les coordonnées, forme avec les trois axes rectangulaires auxquels ce point est rapporté, en sorte qu'il corresponde une droite à chacun des points de l'espace. La condition pour qu'il existe une série de surfaces normales à toutes ces droites est la même que la

condition d'intégrabilité de l'équation différentielle totale

$$(1) \qquad X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Or, cette condition d'intégrabilité est exprimée, comme on sait, par l'équation

$$(2) \qquad 0 = X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right).$$

Cette identité doit subsister quel que soit le changement de variables effectué dans l'équation (1). Si, par exemple, on change la direction des axes, de manière à rendre l'axe des z parallèle à la direction de la droite qui correspond au point de l'espace dont α, β, γ sont les coordonnées, l'équation (1) prendra la forme

$$(3) \qquad X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 = 0,$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées des points de l'espace rapportés aux nouveaux axes, et X_1, Y_1, Z_1 les cosinus des angles des droites correspondantes avec ces mêmes axes; on devra avoir identiquement

$$(4) \qquad 0 = X_1\left(\frac{dY_1}{dz_1} - \frac{dZ_1}{dy_1}\right) + Y_1\left(\frac{dZ_1}{dx_1} - \frac{dX_1}{dz_1}\right) - Z_1\left(\frac{dX_1}{dy_1} - \frac{dY_1}{dx_1}\right);$$

pour le point particulier dont α, β, γ étaient les coordonnées, dans l'ancien système, les quantités X_1, Y_1 deviennent évidemment égales à zéro, et Z_1 à l'unité. Par suite, cette équation devient

$$(5) \qquad \frac{dX_1}{dy_1} = \frac{dY_1}{dx_1};$$

et pour chaque point de l'espace on pourra former, pour des axes convenablement choisis, une condition analogue à l'équation (5). Nous allons faire voir que si cette condition est remplie pour tous les points de l'espace, l'équation (2) sera identiquement satisfaite, et par suite l'équation (1) sera intégrable.

Considérons en effet la différence

$$\frac{dX_1}{dy_1} - \frac{dY_1}{dx_1},$$

qui, par hypothèse, s'annule pour le point dont les coordonnées, dans l'ancien système d'axes, sont α, β, γ. Cherchons à exprimer cette différence dans l'ancien système d'axes.

a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' désignant les cosinus des angles formés par les anciens axes avec les nouveaux, on aura

$$x_1 = ax + by + cz, \quad y_1 = a'x + b'y + c'z, \quad z_1 = a''x + b''y + c''z,$$
$$X_1 = aX + bY + cZ, \quad Y_1 = a'X + b'Y + c'Z, \quad Z_1 = a''X + b''Y + c''Z,$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dY_1}{dx_1} = {} & aa'\frac{dX}{dx} + ba'\frac{dX}{dy} + ca'\frac{dX}{dz} \\ & + ab'\frac{dY}{dx} + bb'\frac{dY}{dy} + cb'\frac{dY}{dz} \\ & + ac'\frac{dZ}{dx} + bc'\frac{dZ}{dy} + cc'\frac{dY}{dz},\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\frac{dX_1}{dy_1} = {} & aa'\frac{dX}{dx} + b'a\frac{dX}{dy} + c'a\frac{dX}{dz} \\ & + ba'\frac{dY}{dx} + bb'\frac{dY}{dy} + bc'\frac{dY}{dz} \\ & + ca'\frac{dZ}{dx} + cb'\frac{dZ}{dy} + cc'\frac{dZ}{dz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dY_1}{dx_1} - \frac{dX_1}{dy_1} = {} & (ba' - ab')\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) \\ & + (ca' - c'a)\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + (cb' - c'b)\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right).\end{aligned}$$

Si l'on remarque que $a'b - b'a$, $ca' - c'a$, $cb' - bc'$ sont égaux à c'', b'', a'', cette équation devient

$$\frac{dY_1}{dx_1} - \frac{dX_1}{dy_1} = c''\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) + b''\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + a''\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right).$$

Le premier membre s'annulant pour le point dont α, β, γ sont coordonnées, il doit en être de même du second qui lui est identique: mais a'', b'', c'' sont proportionnels aux valeurs que prennent Z, Y, X en ce point; on a donc, pour le point α, β, γ,

$$(6) \qquad 0 = Z\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) + Y\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + X\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right).$$

Si donc l'équation (5) est satisfaite pour tous les points de l'espace, il en sera de même de l'équation (6), et l'équation (1) sera intégrable.

2. Le théorème renfermé dans l'équation (5) est susceptible d'une interprétation géométrique très-simple. Puisque cette équation n'a lieu

en chaque point qu'autant que l'on prend l'axe des Z parallèle à la droite correspondante au point considéré, les cosinus X et Y s'annulent pour ce point, en sorte que si, en le prenant pour point de départ, on porte deux longueurs infiniment petites, égales parallèlement aux x et aux y, en nommant σ la valeur commune de ces deux longueurs, l'angle formé par la droite qui correspond à l'extrémité de la première avec l'axe des Y, aura pour cosinus

$$\sigma \frac{dY}{dx},$$

et l'angle formé par la droite qui correspond à l'extrémité de la seconde longueur avec l'axe des X, aura pour cosinus

$$\sigma \frac{dX}{dy};$$

ces deux angles doivent être égaux, d'après l'équation (5); et réciproquement, s'ils le sont pour tous les points de l'espace, l'équation (1) est intégrable. Nous avons donc le théorème suivant :

« Pour que des droites dont la direction est donnée en fonction des » coordonnées de leur point de départ puissent être normales à une sé- » rie de surfaces, il faut et il suffit qu'en prenant un point A dans l'es- » pace, et la droite AZ correspondante à ce point, puis portant, à partir » du point A, perpendiculairement à AZ, deux longueurs infiniment » petites égales AB, AC, la droite correspondante au point B fasse avec » le plan ZAB un angle égal à celui que la droite partant du point C » forme avec le plan ZAC. » — Ainsi, par exemple, il suffit qu'il existe en chaque point deux directions perpendiculaires pour lesquelles ces angles s'annulent, c'est-à-dire telles que les normales aux points C et D soient dans les plans ZAB, ZAC.

Il est d'ailleurs très-facile de vérifier que si la condition est remplie pour deux directions AB, AC, elle le sera pour deux autres directions quelconques perpendiculaires l'une à l'autre. Mais, dans tous les cas, pour démontrer que des droites sont normales à une même surface, il suffira de faire voir qu'il existe en chaque point de l'espace deux directions perpendiculaires à la droite correspondante et pour lesquelles la condition est remplie.

III.

Comme application, je montrerai l'usage que l'on peut faire des résultats précédents à la démonstration du beau théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales.

Considérons trois séries de surfaces orthogonales, et soient, en un point A, AX, AY, AZ les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces qui y passent; soient les trois points M, N, P, pris respectivement à des distances infiniment petites égales du point A, et dans les trois directions AX, AY, AZ. En considérant, au point M, les normales aux surfaces qui se coupent suivant AX, et nommant α, β, γ, α', β', γ' les angles qu'elles forment avec les axes, on aura

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Mais α, α' différant infiniment peu d'un droit, et β, γ étant infiniment petits, cette équation devient, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(1)\qquad \cos\beta' + \cos\gamma = 0.$$

On aurait de même, en nommant α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 les angles que forment avec les axes les normales aux surfaces qui se coupent suivant AN,

$$(2)\qquad \cos\gamma_1 + \cos\alpha'_1 = 0;$$

et enfin, en nommant α_2, β_2, γ_2, α'_2, β'_2, γ'_2 les angles que forment avec les axes les normales menées au point p aux deux surfaces qui passent par ce point, on aura

$$(3)\qquad \cos\alpha_2 + \cos\beta'_2 = 0.$$

Mais, d'après notre théorème énoncé plus haut,

$$(4)\qquad \cos\beta' = \cos\alpha'_1,\quad \cos\gamma = \cos\alpha_2,\quad \cos\gamma_2 = \cos\beta'_2,$$

d'où résulte, en ajoutant les équations (1) et (2),

$$(5)\qquad 2\cos\beta' + \cos\alpha_2 + \cos\beta'_2 = 0,$$

qui, combinée avec l'équation (3), donne

$$\cos\beta' = 0.$$

On aura de même

$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\gamma_1 = 0;$$

ce qui prouve que les normales aux points M, N, P à chacune des surfaces qui se croisent en A, sont situées dans les plans qui passent par ces points et par la normale correspondante en A. Il résulte de là que les points M, N, P sont sur les lignes de courbure des trois surfaces, ce qui est le théorème de M. Dupin.

On peut remarquer que, dans notre démonstration, nous n'avons fait usage que des trois surfaces qui passent en A. Nous avons donc réellement démontré le théorème suivant, dont celui de M. Dupin est une conséquence immédiate :

Si trois surfaces se coupent de manière à être normales en tous les points où elles se rencontrent, les courbes d'intersection seront, sur chacune des trois surfaces, tangentes aux lignes de courbure menées par le point commun aux trois surfaces.

IV.

Malus a démontré que les rayons de lumière partis d'un même point et réfléchis sur une surface quelconque restent, après leur réflexion, normaux à une même surface. M. Charles Dupin a généralisé ce théorème en faisant voir que des rayons de lumière, dirigés suivant les normales à une même surface, peuvent être réfléchis ou réfractés à travers une surface quelconque sans perdre la propriété d'être normaux à une même surface.

Plus récemment, M. Sturm a repris la démonstration du même théorème et est arrivé, par l'analyse, à exprimer les rayons de courbure et la position des lignes de courbure de la surface normale aux rayons réfractés en fonction des éléments correspondants de la surface normale aux rayons incidents.

Tous ces résultats peuvent se déduire géométriquement des théorèmes démontrés dans ce Mémoire.

Remarquons d'abord que si des rayons de lumière sont normaux à une même surface, ils sont, en même temps, normaux aux surfaces, en nombre infini, que l'on peut obtenir en portant, sur chaque rayon, une longueur constante à partir de sa surface normale primitive. Soient,

en effet, *fig.* 1, AZ la normale en un point d'une surface, et AB, AC les

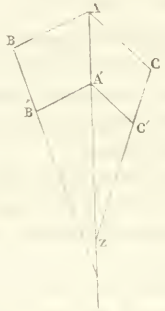


Fig. 1.

directions des lignes de courbure au point A. Menons les normales aux points B et C, elles seront respectivement dans les plans ZAB, ZAC, et si l'on prend sur AZ un point quelconque A', je dis que le faisceau des rayons de lumière satisfera, autour de ce point A', à la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient tous normaux à une même surface passant par A'. Si, en effet, perpendiculairement à A'Z, on prend deux éléments A'B', A'C', situés dans les plans ZAB, ZAC, les rayons correspondants aux points B', C' seront précisément BB', CC'; ils rencontreront donc tous deux la normale A'Z, et par conséquent, d'après notre théorème, tous les rayons lumineux sont, autour du point A', normaux à une même surface.

Il est évident que les normales AA', BB', comprises entre les deux surfaces, ne diffèrent au plus que de quantités infiniment petites du second ordre, et que, par suite, les portions interceptées sur deux normales à une distance finie menées le long d'une même ligne de courbure sont rigoureusement égales entre elles; et comme on peut toujours passer d'un point quelconque à un autre point quelconque de la même surface en s'avançant successivement sur deux lignes de courbure, il en résulte que les deux surfaces interceptent entre elles des portions égales de toutes les normales.

D'après cela, pour démontrer que des rayons normaux à une même surface conservent cette propriété après avoir été réfractés d'une

manière quelconque, il suffira de prouver que la condition que nous avons donnée comme nécessaire et suffisante est remplie pour un point de chaque rayon. Nous choisirons le point situé sur la surface de séparation des deux milieux.

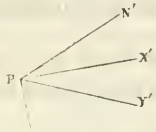
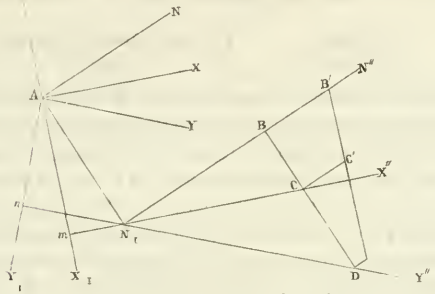


Fig. 2.



Soient, *fig.* 2, AN, la normale à la surface de séparation;

AX, le rayon incident;

AY, le rayon réfracté;

x, l'angle XAN;

y, l'angle YAN;

l, l'indice de réfraction $\frac{\sin x}{\sin y}$.

Portons une longueur infiniment petite AP sur une droite normale aux trois lignes AN, AX, AY, qui, d'après la loi connue de réfraction, sont dans un même plan. Soient PN', PX', PY' les trois droites correspondantes à AN, AX, AY, menées par le point P qui peut être considéré comme faisant partie de la surface de séparation. Si nous projetons ces droites PN', PX', PY' sur un plan perpendiculaire à AP, les angles qu'elles font entre elles ne changeront que de quantités infiniment

petites du second ordre, et, par conséquent, le rapport des deux sinus restera égal à l.

Soient α l'inclinaison de la projection de PX′ sur une parallèle à AX, ou, en d'autres termes, l'inclinaison de PX′ sur le plan PAX;

β l'inclinaison de la projection de PY′ sur une parallèle à AY, c'est-à-dire l'inclinaison de Y′ sur le plan PAY;

Enfin γ l'angle que la projection de PN′ forme avec une parallèle à AN, c'est-à-dire l'inclinaison de PN′ sur le plan PAN; il faudra que

$$\frac{\sin(x+\alpha-\gamma)}{\sin(y+\beta-\gamma)} = \frac{\sin x}{\sin y} = l,$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\alpha-\gamma$ et $\beta-\gamma$ sont des infiniment petits,

$$\frac{(\alpha-\gamma)\cos x}{(\beta-\gamma)\cos y} = l, \quad \beta = \frac{(\alpha-\gamma)\cos x + l\gamma\cos y}{l\cos y}.$$

Cette formule permet, comme on voit, de calculer β au moyen de α et γ supposés connus. D'après notre théorème, pour que les rayons AY soient normaux à une même surface, il est nécessaire et suffisant qu'en prenant, dans le plan perpendiculaire à AY, et normalement à AP, une longueur $AY_1 = AP$, l'angle du rayon YY″ qui passe par le point Y_1 avec le plan YAY_1, soit égal à l'angle β calculé plus haut. Cherchons donc la valeur de ce nouvel angle, que nous désignerons par β'.

Menons par le point A, et dans le plan des lignes AN, AX, AY, trois droites respectivement perpendiculaires à ces lignes, AN_1, AX_1, AY_1; soit AN_1 une longueur égale à AP. Le point N_1 peut être considéré comme situé sur la surface de séparation des deux milieux : soient N_1N'' la normale en ce point, N_1X'', N_1Y'' les rayons incidents et réfractés qui lui correspondent. Ces rayons feront avec le plan des droites AX_1, AY_1, AN_1 des angles infiniment petits, et pourront, par conséquent, être regardés, aux infiniment petits près du second ordre, comme rencontrant les droites AX_1, AY_1 en m et n.

Coupons les trois droites N_1N'', N_1X'', N_1Y'' par un plan dont BCD représente la trace sur le plan des lignes AX, AY, et qui soit perpendiculaire à la projection de N_1N''; supposons, pour fixer les idées, la longueur N_1B égale à l'unité, ce plan sera coupé par les droites N_1N'', N_1X'', N_1Y'' en des points dont je représente le rabattement autour de BD comme charnière par B′, C′, D′. Soient γ_1 l'angle formé par la droite

N_1N'' avec le plan XAN; β_1, α_1 les angles que forment Y_1Y'', X_1X'' avec le même plan, on aura évidemment

$$BB' = \gamma_1, \quad CC' = \frac{\alpha_1}{\cos x}, \quad DD' = \frac{\beta_1}{\cos y}.$$

Mais les points B', C', D' sont en ligne droite, puisque les droites sur lesquelles ils se trouvent sont dans un même plan; on a, par conséquent,

$$\frac{BB' - DD'}{BB' - CC'} = \frac{BD}{BC} = \frac{\tang y}{\tang x} = \frac{\cos x}{l \cos y},$$

et, par suite,

$$\frac{\gamma_1 - \dfrac{\beta_1}{\cos y}}{\gamma_1 - \dfrac{\alpha_1}{\cos x}} = \frac{\cos x}{l \cos y}.$$

Mais, d'après notre théorème, et puisque, par hypothèse, les droites N, X sont normales à une même surface, on a $\gamma_1 = \gamma$; de plus, l'angle α_1, formé par la normale en m avec le plan XAm, est égal à

$$\alpha \times \frac{Am}{AP} = \alpha \cos x, \quad \text{donc} \quad \frac{\alpha_1}{\cos x} = \alpha;$$

et, par suite,

$$\frac{\beta_1}{\cos y} = \frac{(\alpha - \gamma)\cos x + l\gamma \cos y}{l \cos y}, \quad \text{donc} \quad \frac{\beta_1}{\cos y} = \beta;$$

c'est précisément ce qui doit arriver pour que les lignes Y soient normales à une même surface, puisque α, α_1 sont les angles que forment avec les plans correspondants deux normales menées dans deux directions perpendiculaires, mais à des distances du point A dont le rapport est $\cos y$. Si, par conséquent, on avait pris sur AY et AP des longueurs égales, les rayons réfractés correspondants aux points ainsi obtenus auraient fait des angles égaux avec les plans XAX_1, XAP; *ces rayons sont donc normaux à une même surface.*

Reprenons l'équation

$$\beta = \gamma + \frac{(\alpha - \gamma)\cos x}{l \cos y}.$$

Soient θ l'angle de la ligne AP avec l'une des lignes de courbure de la surface normale aux rayons incidents AX; ω l'angle de cette même ligne AP avec la ligne de courbure de la surface normale à AY; enfin u

l'angle qu'elle forme avec la ligne de courbure de la surface de séparation normale à AN.

Si R, r, R′, r', R″, r'' sont les rayons de courbure de ces trois surfaces, nous aurons

$$\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\theta \,.\, \mathrm{AP}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{r}\right),$$
$$\beta = \frac{1}{2}\sin 2\omega \,.\, \mathrm{AP}\left(\frac{1}{\mathrm{R}'} - \frac{1}{r'}\right),$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\sin 2u \,.\, \mathrm{AP}\left(\frac{1}{\mathrm{R}''} - \frac{1}{r''}\right),$$

et, par suite,

$$a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\mathrm{R}'} - \frac{1}{r'}\right)\sin 2\omega = \left(\frac{1}{\mathrm{R}''} - \frac{1}{r''}\right)\sin 2u \\ &+ \frac{\cos x}{l\cos y}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{r}\right)\sin 2\theta - \left(\frac{1}{\mathrm{R}''} - \frac{1}{r''}\right)\sin 2u\right]. \end{aligned} \right.$$

C'est une première relation entre les éléments relatifs à la courbure de la surface normale aux rayons réfractés. On peut facilement en trouver deux autres et déterminer, par suite, les trois quantités R′, r' et ω. Considérons de nouveau les trois normales, *fig.* 3, AN, AX, AY.

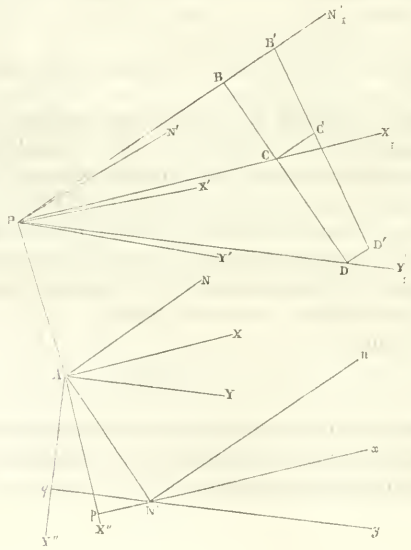


Fig. 3.

menées aux trois surfaces au point A; menons, comme précédemment, la normale AP, et au point P qui peut être considéré comme se trouvant sur chacune des trois surfaces, menons les normales PN′, PX′, PY′. qui doivent se trouver dans un même plan et satisfaire à la condition

$$\frac{\sin X'P'N'}{\sin Y'PN'} = l.$$

Il est facile de voir que les courbures des sections normales faites aux trois surfaces suivant AP sont égales aux angles que forment les lignes PN′, PX′, PY′ avec un plan perpendiculaire à AP, divisés respectivement par la longueur AP. Soient α_n, α_x. α_y ces angles, $\frac{1}{\rho_n}$, $\frac{1}{\rho_x}$, $\frac{1}{\rho_y}$ les courbures des sections, on aura

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\alpha_n}{AP}, \quad \frac{1}{\rho_x} = \frac{\alpha_x}{AP}, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{\alpha_y}{AP}.$$

Cherchons une relation entre α_n, α_x, α_y; pour cela considérons les trois projections des lignes AN′, AX′, AY′ sur le plan perpendiculaire à AP: soient PX'_1, PY'_1, PN'_1 ces projections; concevons un plan BCD mené perpendiculairement à celui de ces droites et suivant une ligne BD normale à PN'_1. Rabattons autour de BD comme charnière les points où les droites PN′, PX′, PY′ viennent percer ce plan. Soient B′, C′, D′ ces rabattements, qui seront en ligne droite. Nous aurons évidemment

$$\frac{BB' - DD'}{BB' - CC'} = \frac{DB}{BC} = \frac{\tang y}{\tang x} = \frac{\cos x}{l \cos y}.$$

Mais

$$BB' = \alpha_n, \quad CC' = \frac{\alpha_x}{\cos x}, \quad DD' = \frac{\alpha_y}{\cos y};$$

donc

$$\frac{\alpha_n - \frac{\alpha_y}{\cos y}}{\alpha_n - \frac{\alpha_x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{l \cos y},$$

d'où l'on tire

$$\alpha_x = \alpha_n \cos x - l\alpha_n \cos y + l\alpha_y,$$

et, par suite,

$$b) \qquad \frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{\rho_n} \cos x - \frac{l \cos y}{\rho_n} + \frac{l}{\rho_y}.$$

Mais on a

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{R}\sin^2\theta + \frac{1}{r}\cos^2\theta,$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{R'}\sin^2\omega + \frac{1}{r'}\cos^2\omega.$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{R''}\sin^2 u + \frac{1}{r''}\cos^2 u,$$

ce qui transforme l'équation (b) en la suivante,

$$c \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin^2\theta}{R} + \dfrac{\cos^2\theta}{r} = \cos x\left(\dfrac{\sin^2 u}{R''} + \dfrac{\cos^2 u}{r''}\right) \\ -l\cos y\left(\dfrac{\sin^2 u}{R''} + \dfrac{\cos^2 u}{r''}\right) + l\left(\dfrac{\sin^2\omega}{R'} + \dfrac{\cos^2\omega}{r'}\right). \end{array} \right.$$

Pour trouver une troisième relation entre les quantités R', r' et ω, menons par le point A, et dans le plan des trois normales AN, AX, AY, trois perpendiculaires à ces normales AN″, AX″, AY″. Par le point N″, situé à une distance infiniment petite AN″, sur la perpendiculaire à AN, menons la normale $N''n$ à la surface de séparation, et les rayons incidents et réfractés $N''x$, $N''y$; ces rayons pourront être considérés comme rencontrant les droites AX″, AY″ en p et q, et il est facile de voir que si α'_n, α'_x, α'_y désignent les angles que les projections des trois droites $N''n$, $N''x$, $N''y$ forment avec les droites correspondantes passant par le point A, on aura, en désignant par ρ'_n, ρ'_x, ρ'_y les rayons de courbure des sections normales faites dans les trois surfaces par le plan XANY,

$$\frac{1}{\rho'_n} = \frac{\alpha'_n}{AN''}, \quad \frac{1}{\rho'_x} = \frac{\alpha'_x}{AN''\cos x}, \quad \frac{1}{\rho'_y} = \frac{\alpha'_y}{AN''\cos y}.$$

Mais les trois droites $N''n$, $N''x$, $N''y$ étant l'une normale à la surface de séparation des milieux, et les deux autres dirigées suivant les rayons incidents et réfractés, on doit avoir

$$\frac{\sin(x + \alpha'_x - \alpha'_n)}{\sin(y + \alpha'_y - \alpha'_n)} = l,$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\frac{\sin x}{\sin y} = l$,

$$\frac{(\alpha'_x - \alpha'_n)\cos x}{(\alpha'_y - \alpha'_n)\cos y} = l,$$

$$\alpha' x = \frac{l(\alpha'_y - \alpha'_x)\cos y + \alpha'_n \cos x}{\cos y},$$

d'où

$$(d) \qquad \frac{\cos x}{\rho'_x} = \frac{l\left(\frac{\cos y}{\rho'_y} - \frac{1}{\rho'_x}\right) + \frac{1}{\rho'_n}\cos x}{\cos x}.$$

Mais, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{\rho'_x} = \frac{\cos^2\theta}{R} + \frac{\sin^2\theta}{r}, \quad \frac{1}{\rho'_y} = \frac{\cos^2\omega}{R'} + \frac{\sin^2\omega}{r'}, \quad \frac{1}{\rho'_n} = \frac{\cos^2 u}{R''} + \frac{\sin^2 u}{r''},$$

en sorte que la formule (d) devient

$$(e) \qquad \left\{\begin{aligned} \cos^2 x\left(\frac{\cos^2\theta}{R} + \frac{\sin^2\theta}{r}\right) &= (l - \cos x)\left(\frac{\cos^2 u}{R''} + \frac{\sin^2 u}{r''}\right) \\ &\quad + l\cos y\left(\frac{\cos^2\omega}{R'} + \frac{\sin^2\omega}{r'}\right). \end{aligned}\right.$$

Les trois formules (a), (c), (e) permettront de calculer les quantités R', r', ω en fonction de R, r, R'', r'', θ et u.

V.

On peut facilement trouver quelles sont toutes les lois de réfraction qui laisseraient subsister le théorème de M. Dupin. Supposons que le rayon réfracté restant toujours dans le plan qui passe par le rayon incident et par la normale à la surface de séparation, $y = \varphi(x)$ représente la relation qui existe entre les deux angles d'incidence et de réfraction; en reprenant la *fig.* 2, et faisant absolument les mêmes raisonnements, en substituant seulement la relation $y = \varphi(x)$ à l'équation

$$\frac{\sin x}{\sin y} = l,$$

on trouvera

$$y + \beta - \gamma = \varphi(x + \alpha - \gamma),$$
$$\beta - \gamma = (\alpha - \gamma)\varphi'(x),$$
$$\beta = \gamma + (\alpha - \gamma)\varphi'(x).$$

On trouvera de même, au moyen des constructions employées plus haut, et en adoptant les mêmes notations,

$$\frac{\beta_1}{\cos y} = \gamma + (\alpha - \gamma)\frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x}.$$

Pour que les droites Y soient normales à une même surface, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta = \frac{\beta_1}{\cos y},$$

c'est-à-dire

$$\gamma\left(1 - \frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x}\right) + \alpha\frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x} = \gamma[1 - \varphi'(x)] + \alpha\varphi'(x).$$

Cette équation devant avoir lieu quelles que soient les quantités α, γ, qui, évidemment, sont indépendantes l'une de l'autre, il faut que l'on ait

$$\varphi'(x) = \frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x};$$

l'intégrale est

$$\varphi(x) = \operatorname{arc\,sin} C \sin x,$$

ou

$$\frac{\sin\varphi(x)}{\sin x} = C.$$

La loi de la nature est, par conséquent, la seule qui puisse permettre au théorème de M. Dupin d'être exact dans toute sa généralité

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES TROIS FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. WILLIAM ROBERTS (DE DUBLIN) [*].

Prenons sur une surface sphérique un point quelconque pour le sommet d'un cône du second degré, dont un des axes principaux extérieurs est un diamètre de la sphère. L'origine des coordonnées rectangulaires étant le centre, choisissons ce diamètre pour l'axe des z, et faisons celui des x parallèle à l'axe intérieur du cône, en sorte qu'on ait, pour l'équation de cette surface,

$$x^2 - y^2 \tang^2 \beta - (1 - z)^2 \tang^2 \alpha = 0,$$

en désignant par α et β les compléments de ses semi-angles principaux, et prenant pour unité le rayon de la sphère; si l'on désigne par θ et ψ les coordonnées polaires d'un point de la sphère, on aura

$$x = \sin\theta \cos\psi, \quad y = \sin\theta \sin\psi, \quad z = \cos\theta,$$

et, pour tous les points de notre courbe sphérique,

$$(A) \qquad \tang \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\psi}}{\tang\alpha \cos\beta}.$$

θ exprime la distance angulaire d'un point de la courbe à l'axe des z,

[*] Dans une Lettre, datée du 11 février dernier et jointe par M. William Roberts à son Mémoire, se trouve le passage suivant qu'on me saura gré d'avoir transcrit :

« Il s'agit de représenter par l'arc d'une courbe sphérique les trois espèces de fonctions elliptiques. Soit une courbe produite par l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré, dont un des axes principaux extérieurs passe par le centre; je dis que l'arc de cette courbe jouit de ladite propriété. — Vous verrez au premier coup d'œil la similitude, quant à la forme, de cette courbe avec la lemniscate ordinaire; ce qui, je pense, donne plus d'intérêt au théorème dont il s'agit. — J'ai lu, dans le numéro d'avril 1843 de votre Journal, un Mémoire très-élégant de M. Alfred Serret, sur la rectification des courbes généralement nommées *lemniscates*. Il est curieux de remarquer qu'en partant de la même propriété de la même courbe que moi, il est aussi parvenu à une représentation de la première transcendante, tout à fait différente de la mienne. » (J. LIOUVILLE.)

et ψ l'angle du plan xz et de celui qui passe par le même point et l'axe des z. Si donc on regarde le sommet du cône comme l'origine des coordonnées polaires sphériques, et le grand cercle du plan des xz comme un axe fixe, θ sera le rayon vecteur, et ψ l'angle polaire d'un point quelconque de ladite courbe, et la relation (A) sera son équation.

Il est aisé de voir l'analogie qui existe entre la forme de cette courbe et celle de la lemniscate ordinaire. Le centre sera un point double, car en faisant $\theta = 0$, on trouve

$$\sin\psi = \pm\cos\beta, \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \text{et} \quad 3.\frac{\pi}{2} + \beta,$$

ce qui donne les directions des rayons vecteurs au moment où ils vont s'évanouir, ou des grands cercles qui touchent la courbe à son centre.

Transformons aussi l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

où s est la longueur de l'arc, par la substitution des valeurs des coordonnées dont nous avons fait usage, il en résultera

$$ds = \sqrt{\sin^2\theta + \frac{d\theta^2}{d\psi^2}}\, d\psi.$$

Mais en différentiant l'équation (A), on a

$$\frac{d\theta}{d\psi} = -\frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\psi}},$$

et

$$\sin\theta = \frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\psi}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\psi},$$

en sorte qu'on a, après quelques réductions.

$$ds = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\psi}\sqrt{\frac{1 + \tang^4\beta\tang^2\psi}{1 - \tang^2\beta\tang^2\psi}}\, d\psi.$$

Je vais montrer que cette différentielle peut se transformer dans celle d'une transcendante elliptique. En effet, si l'on fait

$$\tang\psi = \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}},$$

on aura

$$\sin^2\psi = \frac{\cos^4\beta\sin^2\varphi}{\sin^2\beta + \cos 2\beta\sin^2\varphi}, \quad \sqrt{\frac{1 + \tang^4\beta\tang^2\psi}{1 - \tang^2\beta\tang^2\psi}} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

et

$$d\psi = \frac{\sin\beta\cos^2\beta}{\sin^2\beta + \cos 2\beta \sin^2\varphi}\,\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}},$$

et l'on en déduit sans difficulté

$$s = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{\sin\beta}\int\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}\right)\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}},$$

ou, d'après la notation des fonctions elliptiques,

$$s = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{\sin\beta}\,\Pi\left(-1 + \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}, \sin\beta, \varphi\right);$$

ce qui montre que l'arc compté depuis l'extrémité du demi-axe peut s'exprimer par une fonction elliptique de la troisième espèce, et que le périmètre entier s'exprimera à l'aide de la fonction complète.

Examinons les variétés dont le paramètre (que, selon l'usage, nous désignerons par n) est susceptible.

Premier cas. $\alpha < \beta$. On posera

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sin\lambda, \quad \text{et l'on aura} \quad n = -1 + \cos^2\beta\sin^2\lambda,$$

ce qui est la forme circulaire fondamentale. On pourra donc toujours représenter une fonction de troisième espèce à paramètre circulaire par un arc de notre courbe.

Deuxième cas. $\alpha > \beta$ et $\beta < \frac{\pi}{4}$. Si la fraction $\frac{\sin\alpha}{\tang\beta}$ est inférieure a 1, n est positif, et par conséquent circulaire; si au contraire cette fraction est supérieure à 1, on pourra poser

$$\sin^2\lambda = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}}{1 - \cos^2\beta}, \quad \text{ce qui donne} \quad n = -\sin^2\beta\sin^2\lambda,$$

forme fondamentale du paramètre logarithmique. Donc on peut toujours construire une fonction à paramètre logarithmique, dont l'angle (β) du module est plus petit que $\frac{\pi}{4}$; car, en tirant la valeur de α en λ et β, on a

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \sin^2\beta\sin^2\lambda}{\cot^2\beta},$$

ce qui est, dans tous les cas, une fraction positive.

Troisième cas. $\alpha > \beta$, et $\beta > \frac{\pi}{4}$. Ici $1 - \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}$ est évidemment plus petit que $1 - \frac{\sin^2\beta}{\tang^2\beta}$ ou que $\sin^2\beta$, en sorte qu'on pourra faire

$$\sin^2\lambda = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}}{\sin^2\alpha}, \quad \text{et} \quad n = -\sin^2\beta\sin^2\lambda.$$

Réciproquement, on a

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \sin^2\beta\sin^2\lambda}{\cot^2\beta}.$$

Il est facile de voir que le second membre de cette équation n'est fractionnaire que pour les valeurs de λ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\arc\sin\frac{\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\beta}}{\sin^2\beta}$. Ici donc, si, dans la fonction qu'on cherche à construire, l'angle du paramètre ne tombe pas entre ces limites, un inconvénient se présente, mais heureusement on peut l'éviter en se servant de la transformation donnée par Lagrange, qui fournit pour la fonction proposée

$$\Pi(-\sin^2\beta\sin^2\lambda,\ \sin\beta,\ \varphi)$$

une expression du type suivant,

$$\Pi(-\sin^2\beta\sin^2\lambda, \sin\beta, \varphi) = l\Pi(-\sin^2\beta'\sin^2\lambda', \sin\beta', \varphi') + m\mathrm{F}(\sin\beta', \varphi') + \mathrm{V},$$

l, m étant des coefficients constants, β' un angle plus petit que $\frac{\pi}{4}$, et V une quantité déterminable par des logarithmes [*]; et nous avons vu que la nouvelle fonction Π, qu'on introduit ainsi, peut toujours être construite.

Au reste, il est surtout intéressant de montrer comment on pourra représenter les fonctions de la première et de la seconde espèce.

I. Soit $\sin\alpha = \tang\beta$, ce qui donne

$$\alpha > \beta, \quad \text{et} \quad \beta < \frac{\pi}{4}.$$

[*] Il est à propos de remarquer que l'illustre géomètre Abel a démontré qu'il existe un résultat de cette forme dans tous les cas où, par des relations algébriques, une fonction de première espèce peut se transformer en une autre du même genre, ce que Legendre ne paraît pas avoir aperçu. (Voyez les *Œuvres complètes de N.-H. Abel*, publiées par B. Holmboe, tome I, page 317.)

On a

$$ds = 2\sqrt{\cos 2\beta}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}}, \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{\cos 2\beta}\,F(\sin\beta, \varphi).$$

Lorsqu'il arrive que l'angle du module de la fonction proposée est supérieur à $\frac{\pi}{4}$, il faut la transformer en une autre dont le module soit moindre; ce qui peut s'effectuer par la méthode de Lagrange, ou par le premier théorème de M. Jacobi, qui contient une infinité de transformations de ce genre [*].

II. Soit $\alpha = \beta$. Dans ce cas, où le cône est de révolution, on a

$$ds = 2\cos^3\beta\,\frac{d\varphi}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où, après les réductions ordinaires, et en employant la notation connue.

$$s = 2\cos\beta\left[E(\sin\beta, \varphi) - \frac{\sin^2\beta\sin\varphi\cos\varphi}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Mais l'arc, compté du centre, est exprimé par une fonction de la seconde espèce, sans l'addition d'aucune partie algébrique. Car en reprenant la valeur générale de l'arc considéré comme fonction de l'angle polaire ψ, on a

$$ds = \frac{\sin 2\beta}{\cos^2\psi}\sqrt{\frac{1+\tang^4\beta\tang^2\psi}{1-\tang^2\beta\tang^2\psi}}\,d\psi,$$

et en introduisant un nouvel angle ω tel que

$$\cos\omega = \tang\beta\tang\psi$$

$\left(\text{qui est égal à zéro quand } \psi = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ et à } \frac{\pi}{2} \text{ quand } \psi = 0\right)$, on trouve, après quelques réductions,

$$s = 2\cos\beta\,E(\sin\beta, \omega).$$

D'après ce dernier résultat, il ne reste rien à désirer pour la complète solution du problème proposé. J'espère entrer, une autre fois, dans

[*] Cette variété de notre courbe ne diffère pas au fond de celle que j'ai déjà donnée dans le numéro de Juillet 1843 de ce Journal. Elle est, sous plusieurs points de vue, analogue à la lemniscate vulgaire.

quelques détails relativement aux propriétés géométriques de la courbe dont nous avons ici discuté la rectification.

Note de M. J.-A. Serret.

Le Mémoire qu'on vient de lire résout complétement le problème de la représentation géométrique des transcendantes elliptiques, dont je me suis occupé dans deux articles publiés dans le volume précédent de ce Journal. On peut arriver d'une manière différente aux résultats analytiques que j'ai consignés dans le premier de ces articles.

Les deux équations

$$(1)\qquad r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2t + a^4 = b^4, \qquad r^2 = \frac{a^2 \cos 2\theta}{\cos 2(t-\theta)},$$

où b et θ sont deux paramètres variables, et r et t les coordonnées polaires d'un point quelconque, appartiennent à deux systèmes de lignes isothermes conjuguées et orthogonales. Les courbes du premier système sont des cassinoïdes homofocales, et celles du second, des hyperboles équilatères; si l'on prend pour coordonnées d'un point quelconque les paramètres b et θ des deux courbes conjuguées qui y passent, les anciennes coordonnées seront liées aux nouvelles par les équations (1) ou par les suivantes

$$(2)\qquad r^4 = a^4 \pm 2a^2 b^2 \sin 2\theta + b^4, \qquad \operatorname{tang} 2t = -\frac{b^2 \cos 2\theta}{b^2 \sin 2\theta \pm a^2}.$$

Si l'on différentie ces équations, où b est supposé constant et θ variable, on restera toujours sur la même cassinoïde, et l'on trouvera aisément

$$ds = b^2 . \frac{d\theta}{r}.$$

Si donc on désigne par $s(\theta_0, \theta_1)$, $\sigma(\theta_0, \theta_1)$ les deux arcs interceptés sur la cassinoïde au paramètre b par les deux hyperboles conjuguées aux paramètres θ_0 et θ_1, on aura

$$s(\theta_0, \theta_1) = b^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt[4]{a^4 - 2a^2 b^2 \sin 2\theta + b^4}},$$

$$\sigma(\theta_0, \theta_1) = b^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt[4]{a^4 + 2a^2 b^2 \sin 2\theta + b^4}}.$$

Or, ces deux transcendantes ne sont autres que celles que Legendre a étudiées (*Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 178), et qui peuvent s'exprimer par la somme et la différence de deux fonctions de la première espèce de modules complémentaires et d'amplitudes différentes. On retombe donc très-simplement sur le théorème que j'ai démontré l'année dernière, et l'on voit en même temps que les deux intégrales auxquelles nous parvenons ne changent pas quand on change l'un en l'autre les paramètres a et b, bien qu'alors la courbe change tout à fait de nature, ce qui, du reste, est entièrement conforme à mes premiers résultats.

NOTE
SUR UNE FORMULE D'EULER,

PAR E. CATALAN.

Cette formule est la suivante :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{x^3}{1+x} \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Elle se trouve dans un Mémoire d'Euler, inséré parmi ceux de Saint-Pétersbourg, pour l'année 1811. J'ai essayé de la démontrer d'une manière qui fût à la fois élémentaire et rigoureuse ; j'ai cherché ensuite quelques conséquences de cette formule.

I.

Afin de mettre plus d'ordre dans la discussion relative à la convergence, j'établirai dès à présent une série qui est, pour ainsi dire, *conjuguée* de celle d'Euler, et qui est telle, que l'existence de l'une des deux entraîne l'existence de l'autre. Posons [*]

$$(2)\qquad \frac{x^2}{1+x} = \frac{y^2}{1+y};$$

nous obtiendrons

$$x = y, \quad \text{et} \quad x = -\frac{y}{1+y}.$$

[*] J'avais rédigé cette Note d'une manière un peu différente, et je n'avais démontré l'équation (1) que pour les valeurs de x inférieures à l'unité. M. Liouville, qui m'a indiqué la transformation (2), m'a ainsi permis de compléter mon travail.

Cette dernière valeur, substituée dans l'équation (1), donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}(1+y)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}\frac{y}{1+y} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{y^2}{1+y} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{y^3}{(1+y)^2}\\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\frac{y^4}{(1+y)^2} - \ldots\end{aligned}\right.$$

II.

En représentant par $C_{m,q}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises q à q, nous pourrons, dans le cas de n *entier positif*, mettre l'équation (1) sous la forme abrégée

$$(4)\qquad (1+x)^n = \sum\left[C_{n+p-1,\,2p}\frac{x^{2p}}{(1+x)^p} + C_{n+p,\,2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}\right],$$

p étant une variable qui doit recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Cette formule se vérifie aisément pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$: supposons qu'elle ait été démontrée pour le cas où n est un entier positif quelconque, et prouvons qu'elle subsiste quand on y remplace n par $n+1$.

Si nous multiplions les deux membres par $1+x$, les termes en $\frac{x^{2p-1}}{(1+x)^{p-1}}$, $\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}$, $\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}$ donneront, étant multipliés,

$$\begin{aligned}C_{n+p-1,\,2p-1}\frac{x^{2p-1}}{(1+x)^{p-1}} + C_{n+p-1,\,2p-1}\frac{x^{2p}(1+x)}{(1+x)^p} + C_{n+p-1,\,2p}\frac{x^{2p}(1+x)}{(1+x)^p}\\ + C_{n+p,\,2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p} + C_{n+p,\,2p+1}\frac{x^{2p+2}}{(1+x)^p}.\end{aligned}$$

Le premier terme et le cinquième ne contiennent, ni $\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}$, ni $\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}$; en les négligeant, nous aurons, pour la somme des trois autres,

$$\left.\begin{aligned}&C_{n+p-1,\,2p-1}\\ +\,&C_{n+p-1,\,2p}\end{aligned}\right|\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}\left|\begin{aligned}&+ C_{n+p-1,\,2p-1}\\ &+ C_{n+p-1,\,2p}\\ &+ C_{n+p,\,2p+1}\end{aligned}\right|\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}.$$

Mais, d'après la théorie des combinaisons,

$$\begin{aligned}C_{n+p-1,\,2p-1} + C_{n+p-1,\,2p} &= C_{n+p,\,2p},\\ C_{n+p,\,2p} + C_{n+p,\,2p+1} &= C_{n+p+1,\,2p+1};\end{aligned}$$

donc

$$(1+x)^{n+1} = \sum \left[C_{n+p,\,2p} \frac{x^{2p}}{(1+x)^p} + C_{n+p+1,\,2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p} \right];$$

et comme cette équation ne diffère de l'équation (4) que par le changement de n en $n+1$, il résulte de ce qui précède que la formule (1) est vérifiée pour toutes les valeurs entières et positives de n. Il en est de même pour la formule (3).

Remarque. Lorsque, n étant entier positif, on suppose $x = -1$, tous les termes du second membre de l'équation (1) deviennent infinis, à l'exception des deux premiers; mais si, avant de donner à x cette valeur particulière, on multiplie les deux membres par $(1+x)^{n-1}$, et qu'on fasse ensuite $x = -1$, on trouve $0 = 0$.

III.

Dans le cas de n entier positif, l'équation (3) peut être représentée par

$$(5) \qquad (1+y)^{-n} = \sum \left[C_{n+p-1,\,2p} \frac{y^{2p}}{(1+y)^p} - C_{n+p,\,2p+1} \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^{p+1}} \right].$$

Afin de ramener la quantité entre parenthèses à la forme de celle qui entre dans l'équation (4), je remplace

$$\frac{y^{2p-1}}{(1+y)^p} \quad \text{par} \quad \frac{y^{2p-1}}{(1+y)^{p-1}} - \frac{y^{2p}}{(1+y)^p},$$

et

$$\frac{y^{2p+1}}{(1+y)^{p+1}} \quad \text{par} \quad \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^p} - \frac{y^{2p+2}}{(1+y)^{p+1}}.$$

J'obtiens ainsi

$$(1+y)^{-n} = \sum \left[\begin{matrix} C_{n+p-1,\,2p} \\ + C_{n+p-1,\,2p-1} \end{matrix} \left| \frac{y^{2p}}{(1+y)^p} - C_{n+p,\,2p+1} \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^p} \right. \right],$$

ou

$$(1+y)^{-n} = \sum \left[C_{n+p,\,2p} \frac{y^{2p}}{(1+y)^p} - C_{n+p,\,2p+1} \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^p} \right];$$

ou enfin, en développant,

$$(1+y)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}y + \frac{(n+1)n}{1.2}\frac{y^2}{1+y} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{y}{1+y}$$
$$+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}\frac{y^4}{(1+y)^2} - \ldots.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (1) que par le changement de x en y, et de n en $-n$; donc celle-ci est vraie dans le cas de *n entier négatif*. Observons que dans ce dernier cas, aussi bien que dans celui de l'exposant *entier positif*, le second membre de l'équation (1) n'a qu'un nombre limité de termes.

IV.

Représentons par z la fraction $\frac{x^2}{1+x} = \frac{y^2}{1+y}$; nous pourrons, n étant quelconque, écrire ainsi les équations (1) et (3):

$$(1+x)^n = M + Nx, \tag{6}$$

$$(1+y)^{-n} = M - N\frac{y}{1+y}; \tag{7}$$

en posant, pour abréger,

$$M = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}z^2 + \ldots,$$

$$N = \frac{n}{1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}z + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}z^2 + \ldots.$$

Le terme général de M est de la forme $\frac{(n+i-1)(n+i-2)\ldots(n-i)}{1.2\ldots(2i)}z^i$; son rapport au terme qui le précède est $\frac{(n+i-1)(n-i)}{(2i-1)(2i)}z$, quantité qui deviendra évidemment négative à partir d'une certaine valeur de i. Donc, si l'on peut, abstraction faite du signe, rendre ce rapport α plus petit que l'unité, la série représentée par M sera convergente. Afin de déterminer les valeurs pour lesquelles cette convergence subsiste, posons

$$\alpha = \frac{(i+n-1)(i-n)}{(2i-1)(2i)}z = 1;$$

d'où

$$(4 - z)i^2 - (6 - z)i + n(n - 1)z + 2 = 0.$$

1°. Si l'on a $z > 4$, le premier membre de cette équation deviendra négatif à partir d'une certaine valeur de i; on aura donc, pour de grandes valeurs de cette quantité, $\alpha > 1$, et la série M sera divergente.

2°. Dans le cas de $z = 4$, le premier membre de l'équation sera pareillement négatif pour de grandes valeurs de i, et la série M sera encore divergente.

3°. Mais si l'on a $z < 4$, le rapport α deviendra inférieur à l'unité, et notre série sera convergente.

La même discussion, appliquée à la série N, fait voir qu'elle est convergente pour $z \overset{=}{<} 4$. Conséquemment, les seconds membres des équations (6) et (7) seront convergents pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les racines des équations

$$\frac{x^2}{1 + x} = 4, \quad \frac{y^2}{1 + y} = 4;$$

savoir,

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}, \quad y = 2 \mp 2\sqrt{2};$$

ou, en séparant les racines,

$$x' = + 4{,}828\ldots, \quad y' = - 0{,}828\ldots,$$
$$x'' = - 0{,}828\ldots, \quad y'' = + 4{,}828\ldots.$$

V.

Développons, suivant les puissances ascendantes de x, et par la formule du binôme, les deux membres de l'équation (1). Tant que la variable x sera comprise entre x'' et $+ 1$, ces deux développements seront convergents; et comme cette équation est démontrée lorsque n est entier, les coefficients des mêmes puissances de x seront égaux dans ce cas; donc, d'après un raisonnement connu, ils le seront encore lorsque l'exposant n sera quelconque. Ainsi, la formule (1) est vraie pour toutes les valeurs de n, et pour les valeurs de x comprises entre

x'' et $+1$. Donc aussi l'équation (3) est démontrée pour un exposant quelconque, et pour les valeurs de y comprises entre y'' et $-\frac{1}{2}$.

De même, si nous développons les deux membres de cette dernière équation, nous reconnaîtrons qu'elle est vraie pour les valeurs de y comprises entre $-\frac{1}{2}$ et y'; d'où il résulte que l'équation subsiste pour les valeurs de x comprises entre $+1$ et x'.

En résumé, *les équations* (1) *et* (3) *sont vraies pour toutes les valeurs de l'exposant n, et pour les valeurs de x et de y comprises entre* $2(1-\sqrt{2})$ et $2(1+\sqrt{2})$.

VI.

Si, dans l'équation (7), nous remplaçons y par x, les équations (6) et (7) donneront

$$M + Nx = (1+x)^n, \qquad M(1+x) - Nx = (1+x)^{1-n};$$

d'où

$$M = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x}, \qquad N = \frac{(1+x)^{1+n} - (1+x)^{1-n}}{x(2+x)}.$$

Ainsi,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}z^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6}z^3 + \ldots \\ &\qquad = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x}, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{n}{1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}z + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}z^2 + \ldots \\ &\qquad = \frac{(1+x)^{1+n} - (1+x)^{1-n}}{x(2+x)}. \end{aligned}\right.$$

Ces deux résultats, indiqués dans le Mémoire d'Euler, donnent en particulier, en prenant $z = 1$, d'où $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$:

$$(10)\quad 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{(3+\sqrt{5})^n + 2(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}(5+\sqrt{5})},$$

$$(11)\quad \frac{n}{1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} + \ldots = \frac{(3+\sqrt{5})^{n+1} - 4(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^n(5+3\sqrt{5})}.$$

Ces deux dernières formules donneront encore, par l'addition et la soustraction,

$$(12)\left\{\begin{aligned} &1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}+\ldots\\ &\quad=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\,\frac{(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-2}},\end{aligned}\right.$$

$$(13)\left\{\begin{aligned} &1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}-\ldots\\ &\quad=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}}{10}\,\frac{(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-2}}.\end{aligned}\right.$$

VII.

Après avoir mis l'équation (1) sous la forme (4), cherchons, dans le développement du second membre, ordonné suivant les puissances ascendantes de x, le coefficient de x^k.

En représentant toujours par $C_{m,q}$ le coefficient de x^q dans $(1+x)^m$, nous aurons :

Pour le coefficient de x^{k-2p}, dans $(1+x)^{-p}$,

$$(-1)^{k-2p}\,C_{k-p-1,\,p-1};$$

et pour le coefficient de x^{k-2p-1}, dans $(1+x)^{-p}$,

$$(-1)^{k-2p-1}\,C_{k-p-2,\,p-1}.$$

Ainsi, le coefficient de x^k, provenant de

$$C_{n+p-1,\,2p}\cdot\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}+C_{n+p,\,2p+1}\,\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p},$$

sera

$$(-1)^{k-2p}(C_{n+p-1,\,2p}\times C_{k-p-1,\,p-1}-C_{n+p,\,2p+1}\times C_{k-p-2,\,p-1}).$$

Si donc nous donnons à p les valeurs $1, 2, 3, \ldots$, nous aurons

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\pm C_{n,\,k}\\ &=\sum(C_{n+p-1,\,2p}\times C_{k-p-1,\,p-1}-C_{n+p,\,2p+1}\times C_{k-p-2,\,p-1}),\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\pm\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots k} = \frac{n(n-1)}{1.2}.1 - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}1 \\ &+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}.\frac{k-3}{1} - \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}.\frac{k-4}{1} \\ &+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6}\,\frac{k-4}{1}\,\frac{k-5}{2} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Dans ces deux dernières formules, k est un nombre entier positif; la variable p doit être, dans tous les cas, moindre que $\frac{k+1}{2}$, et si n est entier positif, elle doit être moindre que n. Enfin, on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$, et le nombre des termes doit être *impair* ou *pair*, selon que k est *pair* ou *impair*.

VIII.

Dans ce qui précède, nous avons supposé la variable z positive. Admettons maintenant qu'on lui attribue des valeurs négatives, et examinons dans quel cas les séries M et N seront convergentes.

Nous avons trouvé, dans le § IV, pour l'expression du rapport d'un terme de M à celui qui le précède, $\frac{(n+i-1)(n-i}{(2i-1)(2i)}\,z$. Si le facteur z est négatif, il est clair que, pour de grandes valeurs de i, ce rapport sera constamment positif. Donc, à partir d'un certain rang, tous les termes de la série M seront de même signe; et comme le coefficient de z est, abstraction faite du signe, égal à $\frac{i^2-i-n(n-1)}{4\left(i^2-\frac{i}{2}\right)}$, quantité inférieure à $\frac{1}{4}$ lorsque i sera suffisamment grand, il s'ensuit que si la variable z est comprise entre o et -4, la série M sera convergente. L'application de la règle de M. Raabe ferait voir que cette série devient divergente à partir de $z=-4$.

Les mêmes considérations, appliquées à la série N, conduisent aux mêmes conséquences.

Actuellement, l'équation

$$\frac{x^2}{1+x} = z, \qquad \text{ou} \qquad x^2 - zx - z = 0,$$

donne

$$x = \tfrac{1}{2} z \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} z + 1) z}.$$

Ces deux racines sont imaginaires tant que z est comprise entre 0 et -4; nous pourrons donc les représenter sous cette forme

$$x = -(1 - \alpha) \pm \beta \sqrt{-1},$$

en posant

$$\alpha = \tfrac{1}{2} z + 1, \qquad \beta^2 = -\tfrac{1}{4} z^2 - z.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1;$$

ainsi nous pouvons prendre

$$\alpha = \cos\omega, \qquad \beta = \sin\omega;$$

d'où

$$z = -2(1 - \cos\omega) = -4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega,$$

et

$$1 + x = \cos\omega \pm \sqrt{-1} \sin\omega.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (6), donnent

$$(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega)^n = 1 - 4\frac{n(n-1)}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + \ldots$$

$$+ \left[\frac{n}{1} - 4\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + \ldots\right](-2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Mais,

$$(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega)^n = \cos n\omega \pm \sqrt{-1}\sin n\omega, \quad \sin\omega = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega;$$

donc, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\cos n\omega = 1 - 4\frac{n(n-1)}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + 4^2\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega - \ldots$$

$$-2\frac{n}{1} \qquad + 2.4\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \qquad - \ldots,$$

$$(16)\quad \sin n\omega = \sin\omega \left[\begin{array}{l} \frac{n}{1} - 4\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\sin^2\frac{1}{2}\omega \\ \quad + 4^2\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}\sin^4\frac{1}{2}\omega - \ldots \end{array} \right]$$

On réduit aisément les coefficients des puissances de $\sin\frac{1}{2}\omega$ dans l'avant-dernière équation, et on la ramène alors à la forme

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos n\omega = 1 - 4.\frac{n^2}{1.2}\sin^2\frac{1}{2}\omega + 4^2.\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4}\sin^4\frac{1}{2}\omega \\ \qquad - 4^3.\frac{(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6\frac{1}{2}\omega + \ldots \end{array} \right.$$

Dans ces deux formules, l'arc ω doit être compris entre o et π.

IX.

Les séries (16) et (17) conduisent à un grand nombre de résultats plus ou moins remarquables.

D'abord, si nous supposons successivement

$$\omega = \frac{\pi}{3}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{3},$$

nous obtiendrons

$$(18)\quad \sin\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[\frac{n}{1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right],$$

$$(19)\quad \cos\frac{n\pi}{3} = 1 - \frac{n^2}{1.2} + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4} - \frac{(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$(20)\quad \sin\frac{n\pi}{2} = \frac{n}{1} - 2\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + 2^2\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(21)\quad \cos\frac{n\pi}{2} = 1 - 2\,\frac{n^2}{1.2} + 2^2\,\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$(22)\quad \sin\frac{2n\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[\frac{n}{1} - 3\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + 3^2\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right],$$

$$(23)\quad \cos\frac{2n\pi}{3} = 1 - 3\,\frac{n^2}{1.2} + 3^2\,\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3} + \ldots$$

Si, dans les équations (18) et (19), nous faisons

$$n = \tfrac{1}{2}, \quad n = \tfrac{3}{4}, \quad n = \tfrac{3}{2},$$

il viendra

$$(24) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^3} + \frac{1.3}{2.4.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.2^9} + \ldots.$$

$$(25) \qquad \sqrt{3} = 2 - \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.4.2^3} - \frac{1.3}{2.4.6.2^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.2^7} - \ldots.$$

$$(26) \qquad \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{7.3.1}{1.2.3.4^3} + \frac{11.7.3.1.5}{1.2.3.4.5.4^5} + \frac{15.11.7.3.1.5.9}{1.2.3.4.5.6.7.4^7} + \ldots,$$

$$(27) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3} - \frac{3}{1.2.4} - \frac{7.3.1}{1.2.3.4.4^3} - \frac{11.7.3.1.5}{1.2.3.4.5.6.4^5} - \ldots,$$

$$(28) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2.2^3} - \frac{7.1}{2.4.2^5} - \frac{9.1.3}{2.4.6.2^7} - \frac{11.1.3.5}{2.4.6.8.2^9} - \ldots,$$

$$(29) \qquad 0 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2.2} + \frac{5}{2.4.2^3} + \frac{7.1}{2.4.6.2^5} + \frac{9.1.3}{2.4.6.8.2^7} + \ldots.$$

En prenant, dans les équations (20) et (21),

$$n = \tfrac{1}{3}, \quad n = \tfrac{1}{2}, \quad n = \tfrac{3}{2},$$

nous aurons de même

$$(30) \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + 2\frac{4.2}{1.2.3.3^3} + 2^2\frac{7.4.2.5}{1.2.3.4.5.3^5} + 2^3\frac{10.7.4.2.5.8}{1.2.3.4.5.6.7.3^7} + \ldots,$$

$$(31) \qquad \frac{3}{2}\sqrt{3} = 3 - 2\frac{1}{1.2.3} - 2^2\frac{4.2}{1.2.3.4.3} - 2^3\frac{7.4.2.5}{1.2.3.4.5.6.3^5} - \ldots,$$

$$(32) \qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \ldots.$$

$$(33) \qquad \sqrt{2} = 3 - \frac{5}{4} - \frac{7.1}{4.8} - \frac{9.1.3}{4.8.12} - \frac{11.1.3.5}{4.8.12.16} - \ldots.$$

Les équations (22) et (23) conduiraient à des résultats du même genre.

X.

Dans l'équation (16), divisons les deux membres par $n\omega$, puis supposons que n diminue indéfiniment; à la limite, nous pourrons supposer

$$\frac{\sin n\omega}{n\omega} = 1;$$

d'où

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\omega}{\sin\omega} = \\ 1 + 4\,\dfrac{1}{2.3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + 4^2\,\dfrac{1.2}{3.4.5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + 4^3\,\dfrac{1.2.3}{4.5.6.7}\sin^6\tfrac{1}{2}\omega + \ldots \end{array}\right.$$

Cette série donnera, par les hypothèses $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$,

$$(35)\quad \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.2}{3.4.5} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7} + \ldots\right],$$

$$(36)\quad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2.4}{5.7.9} + \frac{2.4}{7.9.11} + \frac{2.4.6}{7.9.11.13} + \ldots,$$

$$(37)\quad \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[1 + \frac{3}{2.3} + \frac{3.6}{3.4.5} + \frac{3.6.9}{4.5.6.7} + \frac{3.6.9.12}{5.6.7.8.9} + \ldots\right].$$

La comparaison des équations (35) et (37) donne encore

$$(38)\quad 1 + \frac{3}{2.3} + \frac{3.6}{3.4.5} + \frac{3.6.9}{4.5.6.7} + \ldots = 2\left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.2}{3.4.5} + \frac{1.3.4}{4.5.6.7} + \ldots\right].$$

XI.

Si, dans l'équation (17), nous retranchons les deux membres de 1, nous aurons

$$1 - \cos n\omega = 2\sin^2\tfrac{1}{2}n\omega = 4\,\frac{n^2}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - 4^2\,\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + \ldots;$$

d'où

$$2\left(\frac{\sin\frac{n\omega}{2}}{\frac{n\omega}{2}}\right)^2 = \frac{4}{\omega^2}\left[4\,\frac{1}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - 4^2\,\frac{(n+1)(n-1)}{1.2.3}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + \ldots\right];$$

puis, en supposant $n = 0$.

$$(39)\quad \frac{\omega^2}{2} = 4\frac{1}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + 4^2\frac{1}{2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + 4^3\frac{1.2}{3.4.5.6}\sin^6\tfrac{1}{2}\omega + \ldots\,[*].$$

Les équations (34) et (39) permettent, comme on le voit, de développer un arc ou son carré suivant les puissances du sinus de cet arc: elles supposent, ainsi que les précédentes, $\omega < \pi$.

Si, dans l'équation (39), nous supposons successivement

$$\omega = \tfrac{1}{3}\pi, \qquad \omega = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \omega = \tfrac{2}{3}\pi,$$

nous aurons

$$(40)\quad \frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7} + \ldots,$$

$$(41)\quad \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{2}{3.5.6} + \frac{2}{5.7.8} + \frac{2.4}{5.7.9.10} + \frac{2.4}{7.9.11.12} + \ldots,$$

$$(42)\quad \frac{2}{27}\pi^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{3.6}{3.4.5.6} + \frac{3.6.9}{4.5.6.7.8} + \frac{3.6.9.12}{5.6.7.8.9.10} + \ldots.$$

XII.

Revenant à l'équation (1), je la mets sous la forme

$$\frac{(1+x)^n-1}{n} = \frac{1}{1}x + \frac{n-1}{1.2}\frac{x^2}{1+x} + \frac{(n+1)(n-1)}{1.2.3}\frac{x^3}{1+x}$$
$$+ \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \ldots.$$

Si l'exposant n diminue indéfiniment, nous aurons

$$\lim.\frac{(1+x)^n-1}{n} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{1+x}$$
$$+ \frac{1}{3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{1.2}{3.4.5}\frac{x}{(1+x)^2} - \ldots.$$

La fraction $\frac{(1+x)^n-1}{n}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait

---

[*] La formule (39) est due à *de Stainville*; elle se trouve dans le *Cours d'Analyse* de M. Cauchy. Au reste, la plupart des résultats contenus dans ces derniers paragraphes sont probablement connus: si je les ai rapportés, ce n'a été que pour montrer combien la formule d'Euler est fertile en conséquences.

$n = 0$; mais, en appliquant la règle ordinaire, on trouve que sa limite est égale au logarithme népérien de $1 + x$; donc

$$(43)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{l.}(1+x) = x &- \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{1+x} \\ &+ \frac{1}{3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{1.2}{3.4.5}\frac{x^5}{(1+x)^2} - \ldots \end{aligned} \right.$$

Cette série est convergente, aussi bien que les précédentes, entre

$$x = 2(1 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad x = 2(1 + \sqrt{2}).$$

Elle donne, par exemple,

$$\mathrm{l.}\,2 = 1 - \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3.2^2} + \frac{1}{3.4.2^3} + \frac{1.2}{3.4.5.2^4} - \ldots.$$

NOTE SUR L'HÉLIOSTAT,

PAR M. CABART,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Les ingénieuses solutions que le problème de l'héliostat a reçues dans ces derniers temps conduisent à des dispositions très-dissemblables qui ont peut être éloigné l'attention du principe unique dont elles dérivent toutes. L'étude comparée des divers instruments peut l'y ramener en faisant voir que ces solutions, différentes en apparence, satisfont à une condition générale qui ne paraît pas susceptible de changer, comme essentiellement liée à la question même, telle que doit se la poser l'artiste :

Les rayons solaires décrivant une surface conique droite dont l'axe est la ligne des pôles et dont l'angle au sommet varie d'un jour à l'autre dans des limites connues, conduire un miroir qui réfléchisse ces rayons suivant une direction donnée.

Le mouvement de ce réflecteur doit nécessairement dépendre de celui d'une ligne mobile décrivant parallèlement aux rayons incidents un cône oblique autour de la ligne de réflexion constante; la ligne mobile et la ligne fixe, issues d'un même point, doivent etre également inclinées sur le plan du réflecteur. C'est par le mode de liaison entre le réflecteur et la ligne mobile, et par le sens de sa direction par rapport aux rayons solaires, que les héliostats peuvent différer.

Dans l'instrument de S'Gravesande les deux lignes d'égale inclinaison sont dirigées en sens contraire du mouvement de la lumière, elles forment, avec une ligne rigide perpendiculaire au plan du miroir, un triangle isoscèle dont la ligne rigide est la base. La longueur des côtés varie avec la déclinaison du Soleil.

Dans l'instrument de Gambey le triangle isoscèle est matériellement

constitué. Deux lignes rigides de longueurs égales dirigées, comme dans le premier instrument, à la rencontre des rayons lumineux, sont liées par des articulations convenables à une ligne de longueur variable située dans le plan du réflecteur et passant à son centre. Les deux côtés du triangle isoscèle conservent invariablement leur longueur pour toutes les déclinaisons.

M. Silbermann dirige les deux lignes d'égale inclinaison dans le sens des rayons solaires. Le miroir placé au point de concours de ces lignes conserve sur chacune d'elles une égale inclinaison au moyen d'un dispositif simple. Deux lignes égales articulées entre elles, et sur les premières distances égales de leur point de concours, forment un quadrilatère isoscèle dont le sommet opposé au miroir est assujetti à suivre une directrice normale à son plan.

On est inévitablement conduit à ce dispositif quand, partant de la construction si élégante de M. Gambey, on se demande quel moyen mécanique y suppléerait si l'on transportait le réflecteur parallèlement à lui-même au sommet du triangle isoscèle fermé par l'appendice qui le fait mouvoir.

NOTE

Sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré,

PAR R. LOBATTO,

Professeur de Mathématiques à l'Académie royale de Delft.

1. M. le professeur Young, dans son Traité intitulé *The Analysis and solution of cubic and biquadratic equations*, publié à Londres en 1842, a fait connaître les formules suivantes pour obtenir les valeurs numériques de deux racines quelconques x_1, x_2 de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

la troisième x étant connue :

$$x_1 = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}}{3q + 2px}, \quad x_2 = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}}{3q + 2px}.$$

Ces deux formules, qui n'en forment qu'une seule en donnant le double signe au radical, peuvent être démontrées ainsi qu'il suit.

2. On a, d'après la formule de Cardan, en posant

$$(1) \qquad \begin{cases} y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}, \\ z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}, \end{cases}$$

pour la valeur d'une des racines,

$$x = y + z.$$

Les deux autres seront comprises dans l'expression

$$(2) \qquad -\tfrac{1}{2}\left[x \pm (y - z)\sqrt{-3}\right].$$

Il s'agit maintenant d'obtenir la valeur de la différence $y - z$ en fonction de x et des coefficients p, q. Pour cela, les formules (1) donnent les relations

$$y^3 - z^3 = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}, \quad y^3 + z^3 = -q, \quad yz = -\frac{p}{3}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = \frac{y^3 + z^3}{y + z} + 2yz,$$

d'où l'on déduira, après les substitutions nécessaires,

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}{y - z} = -\frac{q}{x} - \frac{2p}{3};$$

partant,

$$y - z = -\frac{3x\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{3q + 2px},$$

ce qui change la formule (2), toutes réductions faites, en celle-ci :

$$(3) \qquad -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}}{3q + 2px},$$

expression très-propre au calcul des deux autres racines, chaque fois que la quantité sous le radical représente un carré parfait, ce qui aura nécessairement lieu lorsque les trois racines seront des nombres commensurables. Il peut arriver cependant que cette quantité soit un nombre carré, sans qu'aucune des trois racines ait une valeur commensurable.

3. Dans le cas où $\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}$ est un nombre irrationnel, il sera préférable de calculer les deux racines inconnues à l'aide de la formule

$$(4) \qquad -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3q}{x} - p},$$

ou de celle-ci

$$-\frac{x}{2} \pm \sqrt{3\left(\frac{x}{2}\right)^2 - p},$$

à laquelle on parvient facilement de la manière suivante.

On a, en vertu des propriétés des trois racines,

$$x_1 + x_2 = -x, \quad x_1 x_2 = -\frac{q}{x},$$

donc

$$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{x^2 + \frac{4q}{x}} = \pm\sqrt{\frac{x^3+4q}{x}} = \pm\sqrt{\frac{3q}{x} - p} = \pm 2\sqrt{-\frac{3x^2}{4} - p}.$$

$$x_1 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3q}{x} - p}, \quad x_2 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3q}{x} - p},$$

$$= -\frac{x}{2} + \sqrt{-\frac{3x^2}{4} - p}, \quad = -\frac{x}{2} - \sqrt{-\frac{3x^2}{4} - p}.$$

En appliquant la formule (3) à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

qui donne

$$p = -7, \quad q = 7, \quad \sqrt{-p^3 - 6\tfrac{3}{4}q^2} = \sqrt{343 - 330{,}75} = 3{,}5,$$

on trouvera, pour les valeurs des deux racines x_1, x_2,

$$-\frac{x}{2} \pm \frac{3{,}5x}{21 - 14x} = -\frac{x}{2} \pm \frac{x}{6 - 4x}.$$

4. Il paraît, d'après l'auteur que nous avons cité ci-dessus, qu'un de ses compatriotes, M. Lockhart, possède une autre formule pour exprimer ces racines sous forme rationnelle, lorsque la quantité $-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2$ est un nombre carré. En effet, ce dernier géomètre doit avoir publié en 1837, dans un ouvrage sur la résolution des équations numériques, que deux racines quelconques de l'équation

$$x^3 - 19x - 30 = 0,$$

qui remplit la condition énoncée, et qui a pour racines 5, -3, -2, peuvent s'exprimer par deux fractions rationnelles dont l'une est

$$(5) \qquad -\left(\frac{163x + 361}{57x + 107}\right),$$

où l'on peut prendre pour x une des trois racines à volonté, de ma-

nière que cette seule fraction renferme à la fois les deux racines inconnues.

Cette expression assez remarquable diffère de celle donnée par M. Young, puisqu'en appliquant sa formule (3) à l'équation proposée, on trouve la formule

$$-\tfrac{1}{2}x \pm \frac{14x}{45+19x},$$

qui ne lui semble pas réductible à la précédente.

N'ayant pas connaissance du travail de M. Lockhart sur cette matière, j'ai tâché d'obtenir la formule générale d'où l'équation (5) a été déduite, et qui doit avoir la forme

$$\frac{Ax+B}{A'x+B'},$$

A, B, A', B' étant des nombres entiers. J'y suis parvenu de la manière que je vais actuellement exposer.

5. Comme la réalité des trois racines exige que le coefficient p soit un nombre négatif, nous présenterons la proposée sous la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

p étant toujours positif, et q d'un signe quelconque.

Mettons, pour abréger, la quantité

$$\sqrt{p^3 - 6\tfrac{3}{4}q^2} = r;$$

les deux racines x_1, x_2 seront comprises dans la formule

$$-\frac{x}{2} \pm \frac{rx}{3q-2px}.$$

Or, si l'on remplace la fraction $\frac{Ax+B}{A'x+B'}$ par $\frac{ax+b}{x+c}$, il est évident que cette dernière expression ne pourra renfermer la valeur d'une racine x_1 ou x_2, à moins de satisfaire à l'une des deux équations

$$-\frac{x}{2} + \frac{rx}{3q-2px} = \frac{ax+b}{x+c},$$

$$-\frac{x}{2} - \frac{rx}{3q-2px} = \frac{ax+b}{x+c}.$$

Lorsque la première aura fourni les valeurs des inconnues a, b, c en fonction de p, q et r, il ne s'agira que d'y changer r en $-r$ pour obtenir les valeurs de a, b, c qui conviennent à la seconde des équations précédentes.

On tire de la première

$$\frac{rx}{3q-2px} = \frac{ax+b}{x+c} + \frac{x}{2} = \frac{x^2+(2a+c)x+2b}{2(x+c)},$$

ou bien, en posant $2a+c=a'$,

$$2rx(x+c) = (3q-2px)(x^2+a'x+2b).$$

Développant et réduisant, il vient

$$2px^3 + (2r-3q+2pa')x^2 + (2rc+4bp-3qa')x - 6bq = 0,$$

et, après avoir divisé par $2p$,

$$x^3 + \left(\frac{2r-3q}{2p} + a'\right)x^2 + \left(2b + \frac{2rc-3qa'}{2p}\right)x - \frac{3bq}{p} = 0.$$

Cette équation du troisième degré devant nécessairement être identique avec la proposée

$$x^3 - px + q = 0,$$

il en résulte, pour déterminer les valeurs de a, b, c, les trois relations

$$(6)\quad \frac{2r-3q}{2p} + a' = 0,\quad 2b + \frac{2rc-3qa'}{2p} = -p,\quad \frac{3bq}{p} = -q,\quad \text{ou } b = -\frac{p}{3}.$$

La seconde se réduit alors à

$$\frac{2rc-3qa'}{2p} + \frac{p}{3} = 0.$$

En y substituant la valeur de a', déduite de la première, on trouvera

$$2rc + \frac{3q}{2p}(2r-3q) + \frac{2p^2}{3} = 0,$$

ou, en réduisant,

$$4prc + 6qr - 9q^2 + \frac{4p^3}{3} = 0.$$

Or, puisqu'on a

$$4r^2 = 4p^3 - 27q^2.$$

la dernière équation se change en

$$4prc + 6qr + \tfrac{4}{3}r^2 = 0.$$

d'où l'on tire enfin

$$c = -\left(\frac{2r + 9q}{6p}\right).$$

Quant à la valeur de a, on l'obtient directement à l'aide de la première des équations (6), qui donne à cet effet

$$2a = a' - c = \frac{3q - 2r}{2p} - c,$$
$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{3q - 2r}{2p} + \frac{2r + 9q}{6p}\right) = \frac{9q - 2r}{3p}.$$

Les valeurs trouvées pour a, b, c, fournissent ainsi pour une des racines qui conviennent au cas de r positif,

$$x_1 = \frac{\left(\frac{9q - 2r}{6p}\right)x - \frac{p}{3}}{x - \frac{9q + 2r}{6p}},$$

ou bien, en donnant à cette expression la forme $\frac{Ax + B}{A'x + B'}$,

$$(7) \qquad x_1 = \frac{(9q - 2r)x - 2p^2}{6px - (9q + 2r)}.$$

En y changeant le signe de r, on en déduira sur-le-champ, pour la valeur de la seconde racine x_2, la fraction

$$(8) \qquad x_2 = \frac{(9q + 2r)x - 2p^2}{6px - (9q - 2r)};$$

ce qui revient à changer A en B, et réciproquement.

6. Telles sont les deux fractions rationnelles qui expriment les deux racines x_1, x_2 en fonction de la troisième x, pourvu toutefois que r soit un nombre commensurable.

Remarquons encore que x pouvant représenter une quelconque

des trois racines, il faudra que la formule (7) reproduise celle (8), en y substituant à la place de x la valeur de x_1 donnée par la formule (7) même. C'est ce qui se vérifie en effet; car on aura alors

$$x_2 = \frac{9q - 2r\left[\frac{(9q-2r)x - 2p^2}{6px - (9q+2r)}\right] - 2p^2}{6p\left[\frac{(9q-2r)x - 2p^2}{6px - (9q+2r)}\right] - (9q+2r)}$$

$$= \frac{[(9q-2r)^2 - 12p^3]x + 8p^2 r}{-24prx + (9q+2r)^2 - 12p^3}$$

$$= -\frac{(36qr + 8r^2)x + 8p^2 r}{-24prx + 36qr - 8r^2} = \frac{(9q+2r)x - 2p^2}{6px - (9q-2r)},$$

résultat qui s'accorde avec la formule (8).

Appliquons à présent ces formules à l'équation

$$x^3 - 19x - 30 = 0,$$

où l'on a

$$p^3 = 6859, \quad \frac{27q^2}{4} = 6075, \quad r = \sqrt{784} = 28,$$

$$9q - 2r = -270 - 56 = -326, \quad 9q + 2r = -270 + 56 = -214:$$

donc

$$x_1 = -\left(\frac{326x + 2\times 361}{114x + 214}\right) = -\left(\frac{163x + 361}{57x + 107}\right),$$

expression conforme à celle donnée par M. Lockhart (n° 4).

On trouvera de même

$$x_2 = -\left(\frac{107x + 361}{57x + 163}\right).$$

Mais la première de ces formules suffirait au besoin, puisqu'elle renferme deux racines à la fois, ainsi que nous venons de le montrer d'une manière générale.

7. La formule (7) va nous conduire maintenant à une propriété remarquable appartenant aux racines d'une classe étendue d'équations de la forme

$$x^3 - px + q = 0.$$

lorsqu'on les développe en fractions continues d'après la méthode de Lagrange. Cette propriété consiste en ce que ces fractions (les racines étant supposées toutes les trois réelles), se termineront chacune par les mêmes dénominateurs partiels, ou, en d'autres termes, que le calcul de ces dénominateurs, à l'aide des diverses équations transformées, finira par produire la même transformée pour chacune des trois racines.

C'est ainsi, par exemple, qu'en traitant l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

par la méthode dont il s'agit, on obtiendra pour les deux racines positives comprises entre 1 et 2, les fractions continues

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}}}}, \qquad x_1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}}}},$$

et pour la racine négative comprise entre -3 et -4,

$$-x_2 = 3 + \frac{1}{y},$$

y étant la racine positive de l'équation transformée

$$y^3 - 20y^2 - 9y + 1 = 0,$$

de sorte qu'il suffira de connaître le développement de cette racine pour en déduire celui des trois racines x, x_1, x_2 [*].

8. Tâchons d'abord d'établir les conditions qui doivent être véri-

---

[*] Dans une Note sur la résolution des équations numériques, insérée au tome Ier de ce Journal, page 341, M. Vincent, en faisant ressortir la dépendance des trois racines de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

observe avec raison que la propriété dont jouit l'équation en y mériterait peut-être un examen spécial. Nos recherches renferment l'explication complète de cette propriété, en indiquant les circonstances où elle pourra se réaliser.

fiées par l'équation en x, pour que celle-ci puisse satisfaire à la propriété que nous venons d'énoncer.

Supposons, à cet effet, qu'après avoir obtenu pour une des racines x la série des dénominateurs fournis par les transformées successives jusqu'à celle en y, les fractions réduites qui se rapportent aux deux derniers dénominateurs soient exprimées par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$; il est évident, d'après la théorie des fractions continues, que la valeur complète de cette racine sera

$$x = \frac{P + Qy}{P' + Q'y}.$$

Désignant de même par $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$ les deux dernières fractions réduites relatives à une seconde racine x_1, on aura pareillement

$$x_1 = \frac{M + Ny}{M' + N'y},$$

la transformée en y étant supposée la même pour chaque racine.

On tire de la valeur de x,

$$y = \frac{P - P'x}{Q'x - Q};$$

cette expression change la valeur de x_1 en

$$x_1 = \frac{(MQ' - NP')x + NP - MQ}{(M'Q' - N'P')x + N'P - M'Q},$$

qu'on pourra présenter sous la forme simplifiée

$$(9) \qquad x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'}.$$

Or, puisque P, Q,... sont des nombres entiers, il en sera de même des nombres A, B, A', B'. Donc, en vertu de ce qui a été précédemment démontré, la propriété dont il s'agit exige en premier lieu que la quantité $p^3 - 6\frac{3}{4}q^2$ soit un carré parfait.

Il reste encore à satisfaire à une seconde condition dépendante des propriétés des fractions continues. En effet, les nombres P, Q,..., qui entrent dans la dernière valeur de x, doivent évidemment vérifier les

équations

$$PQ' - P'Q = \pm 1, \quad MN' - M'N = \pm 1.$$

En partant de ces relations on s'assure bien vite que les nombres A, B, A', B' fournissent également la relation

$$A'B - AB' = \pm 1.$$

9. Comparons la valeur de x_1, donnée par la formule (9), à celle obtenue (n° 5) en fonction de p, q, r; et puisqu'une des trois racines est toujours négative, remplaçons dans cette dernière expression x par $-x$, il viendra

$$x_1 = \frac{(9q - 2r)x + 2p^2}{6px + 9q + 2r}, \tag{10}$$

x désignant ici la valeur numérique d'une racine négative de la proposée.

Pour que les deux formules (9) et (10) soient identiques, il faut et il suffit que les nombres A, B, A', B' soient respectivement proportionnels aux nombres

$$9q - 2r, \quad 2p^2, \quad 6p, \quad 9q + 2r,$$

qui les remplacent dans la formule (10). On pourra donc poser

$$kA = 9q - 2r, \quad kB = 2p^2, \quad kA' = 6p, \quad kB' = 9q + 2r,$$

d'où résultera d'abord

$$k^2(AB' - A'B) = 81q^2 - 4r^2 - 12p^3 = -16r^2,$$

en ayant égard à la valeur de r^2. Et puisqu'on peut supposer

$$AB' - A'B = -1,$$

on aura

$$k = 4r,$$

ce qui conduit aux relations

$$9q - 2r = 4Ar, \quad p^2 = 2Br, \quad 3p = 2A'r, \quad 9q + 2r = 4B'r,$$

dont les première et quatrième donnent

$$9q = 2r(A + B'), \quad B' - A = 1;$$

partant,

$$q = \left(\frac{2A + 1}{9}\right) 2r.$$

On a de plus

$$p = \frac{2A'}{3} r, \quad B = \frac{2A'^2}{9} r.$$

Or, en substituant les valeurs de p et q dans l'équation

$$12p^3 - 81q^2 = 12r^2,$$

celle-ci deviendra

$$\frac{32A'^3 r^3}{9} - 4(2A + 1)^2 r^2 = 12r^2,$$

d'où il suit :

$$r = \frac{27 + 9(2A + 1)^2}{8A'^3} = \frac{9}{8}\left[\frac{3 + (2A + 1)^2}{A'^3}\right],$$

$$p = \frac{3}{4}\left[\frac{3 + (2A + 1)^2}{A'^2}\right] = \frac{3(A^2 + A + 1)}{A'^2},$$

$$q = \frac{1}{4}\frac{(2A + 1)[3 + (2A + 1)^2]}{A'^3} = \left(\frac{2A + 1}{3A'}\right) p,$$

$$B = \frac{2A'^2 r}{9} = \frac{1}{4}\frac{[3 + (2A + 1)^2]}{A'} = \frac{A^2 + A + 1}{A'}, \quad B' = 1 + A.$$

Les valeurs de A, A′ pouvant être prises arbitrairement, on voit maintenant qu'il existe une infinité d'équations du troisième degré de la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

pour lesquelles la formule

$$x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'},$$

qui indique la liaison entre deux racines quelconques x, x_1, remplit la condition

$$AB' - A'B = -1,$$

conséquence nécessaire de la propriété énoncée au n° 7.

Quant à la troisième racine x_2, qui aura alors pour expression

$$x_2 = \frac{B'x + B}{A'x + A},$$

il est clair qu'elle y satisfera également, puisqu'on n'a fait qu'échanger entre eux les nombres A, B', ainsi qu'il a déjà été observé au n° 5.

Donc, pour que la propriété dont il s'agit puisse se présenter, il faut que les nombres p, q reçoivent des valeurs de la forme énoncée ci-dessus. Mais l'inverse aura lieu également, c'est-à-dire que si la condition

$$AB' - A'B = -1$$

est vérifiée, il s'ensuivra nécessairement que le développement en fraction continue de chaque racine conduit à une même transformée. En effet, en remplaçant A, B, A', B' par leurs valeurs en fonction de P, Q,..., on trouvera

$$AB' - A'B = (MN' - M'N)(PQ' - P'Q) = -1,$$

équation à laquelle on ne pourra satisfaire à moins qu'on n'ait séparément

$$MN' - M'N = \pm 1, \quad PQ' - P'Q = \pm 1,$$

chaque facteur du second membre devant être un nombre entier.

Par conséquent, chacune des expressions $\frac{P + Qy}{P' + Q'y}$, $\frac{M + Ny}{M' + N'y}$ exprimera la valeur d'un développement en fraction continue.

10. En faisant $A' = 1$, chaque valeur attribuée à la quantité A fournira des nombres entiers pour p et q.

Soit donc $A = 2$, il viendra

$$p = 21, \quad q = 35, \quad B = 7, \quad B' = 3.$$

L'équation

$$x^3 - 21x + 35 = 0$$

donnera lieu à la formule

$$x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'} = \frac{2x + 7}{x + 3}, \quad x_2 = \frac{3x + 7}{x + 2}.$$

Si $A = 3$, on aura

$$p = 39, \quad q = 31, \quad B = 13, \quad B' = 4,$$

$$x^3 - 39x + 31 = 0, \quad x_1 = \frac{3x + 13}{x + 4}, \quad x_2 = \frac{4x + 13}{x + 3}.$$

Si l'on prend $A = 4$, $A' = 3$, il viendra

$$p = 7, \quad q = 7, \quad B = 7, \quad B' = 5;$$

on tombera alors sur l'équation connue

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

et il viendra

$$x_1 = \frac{4x + 7}{3x + 5}, \quad x^2 = \frac{5x + 7}{3x + 4}.$$

Il ne faut pas oublier que, dans les formules précédentes, x désigne la valeur numérique de la racine négative. En y changeant le signe de x, on obtiendra des expressions applicables à chacune des trois racines.

Nous avons déjà donné au n° **7** les valeurs des racines de la dernière équation, exprimées sous la forme de fractions continues. En les réduisant à des fractions ordinaires, on trouvera

$$x = \frac{22y + 5}{13y + 3}, \quad x_1 = \frac{19y + 4}{14y + 3}, \quad -x = \frac{3y + 1}{y}.$$

Si l'on substitue, dans les deux premières, la valeur de y déduite de la troisième, il en résultera

$$x = \frac{5x - 7}{3x - 4}, \quad x_1 = \frac{4x - 7}{3x - 5},$$

valeurs qui, après y avoir changé le signe de x, s'accordent avec celles obtenues ci-dessus.

11. Nous terminerons cette Note en faisant observer que les formules

$$x_1 = \frac{(9q - 2r)x - 2p^2}{6px - (9q + 2r)}, \quad x_2 = \frac{(9q + 2r)x - 2p^2}{6px - (9q - 2r)},$$

conduisent à celles-ci :

$$x_1 - \frac{9q - 2r}{6p} = -\frac{8r^2}{3p\,[6px - (9q + 2r)]},$$

$$x_2 - \frac{9q + 2r}{6p} = -\frac{8r^2}{3p\,[6px - (9q - 2r)]}.$$

Or, en désignant toujours par x la racine négative, les expressions précédentes deviendront, après y avoir changé le signe de x,

$$x_1 - \frac{9q - 2r}{6p} = \frac{8r^2}{3p\,(6px + 9q + 2r)},$$

$$x_2 - \frac{9q + 2r}{6p} = \frac{8r^2}{3p\,(6px + 9q - 2r)}.$$

Si q est positif, x_1 et x_2 le seront également, puisque la proposée présentera alors deux variations de signe. Et si l'on a en même temps

$$9q > 2r,$$

il en résultera nécessairement

$$x_1 > \frac{9q - 2r}{6p}, \quad x_2 > \frac{9q + 2r}{6p}.$$

De plus,

$$x = x_1 + x_2 > \frac{3q}{p}.$$

La connaissance de ces limites inférieures pourra souvent être utile en effectuant le calcul numérique des trois racines, surtout lorsque deux d'entre elles sont comprises entre deux nombres entiers k et $k + 1$. En les appliquant aux racines positives de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

comprises entre 1 et 2, on a de suite

$$x_1 > \tfrac{4}{3}, \quad x_2 > \tfrac{5}{3}, \quad x > 3.$$

Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques,

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Dans la théorie de la flexion des verges élastiques à double courbure sollicitées par des forces quelconques, on obtient trois équations [*] :

$$(1)\qquad \frac{\delta ds}{ds} = \mathrm{D}, \quad \frac{1}{ds}\,\delta\frac{ds}{\rho} = \mathrm{F}, \quad \frac{1}{ds}\,\delta\frac{ds}{\tau} = \mathrm{T},$$

dans lesquelles D, F, T représentent des fonctions connues des coordonnées primitives x, y, z d'un point quelconque m de l'*axe* courbe de la pièce, S la longueur de l'arc de cet axe jusqu'au point m, $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds}{\tau}$ l'angle de contingence et l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la même courbe à ce point; enfin δ la caractéristique des variations provenant des déplacements très-petits des points de l'axe, déterminés par l'action des forces données, dont les composantes et les moments entrent dans D, F, T.

Ce sont ces déplacements $\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, $\zeta = \delta z$, estimés parallèlement aux x, y, z, qu'il s'agit de trouver.

Pour cela, effectuons les différentiations par δ des premiers membres des équations précédentes; après avoir remplacé ds, $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\tau}$ par leurs expressions générales connues en x, y, z, nous aurons trois équations différentielles simultanées du premier, du deuxième et du troisième ordre en ξ, η, ζ. Si nous éliminons deux de ces inconnues, par exemple η et ζ (ce qui se fait facilement en différentiant la première équation et en en tirant les valeurs de $d^2\eta$, $d^2\zeta$, d'où, à l'aide de la seconde équation, celles de $d\eta$ et $d\zeta$ que l'on substitue dans la troisième), les intégrales disparaissent et nous obtenons une équation en ξ,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\xi\, d^2y\, d^3z - d\xi\, d^2z\, d^3y + dy\, d^2z\, d^3\xi - dy\, d^2\xi\, d^3z \\ &\qquad + dz\, d^2\xi\, d^3y - dz\, d^2y\, d^3\xi = \mathrm{S}ds^6, \end{aligned}\right.$$

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 952.

dans laquelle S représente une certaine fonction connue (comme D, F, T) des coordonnées primitives du point m, ou de l'arc s que l'on peut prendre pour variable indépendante.

Si l'on remplace, dans le premier membre, y et z par leurs valeurs en s, tirées des équations de la courbe primitive de l'axe, on n'a plus, dans l'équation précédente, que ξ et s. Cette équation différentielle du troisième ordre est linéaire; mais les coefficients de $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ n'y sont point constants, et il n'existe pas de méthode générale pour résoudre, par rapport à ξ, une équation de ce genre.

Aussi j'ai cherché à intégrer directement l'équation (2) sans particulariser son second membre. J'y ai réussi en posant

$$d\xi = u dz, \quad dy = v dz.$$

La substitution dans les six termes du premier membre en produit vingt-deux, mais il y en a vingt qui s'entre-détruisent, et ce premier membre se réduit à

$$dz^3 (du\, d^2 v - dv\, d^2 u) = - dz^3 dv^2 d.\frac{du}{dv}.$$

Donc on a

$$- dz^3 \left(d.\frac{dy}{dz}\right)^2 d.\frac{d.\frac{d\xi}{dz}}{d.\frac{dy}{dz}} = S ds^6,$$

équation qui est intégrable; on en tire

$$\frac{d\xi}{dz} = -\int\left(d.\frac{dy}{dz}\right)\int\frac{S ds^5}{dz^2\left(d.\frac{dy}{dz}\right)^2};$$

et l'on fait disparaître l'intégrale double en intégrant par parties, ce qui donne

$$d\xi = dz\int\frac{S ds^6}{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2}\, dy - dy\int\frac{S ds^6}{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2}\, dz.$$

On aurait des expressions analogues pour $d\eta$, $d\zeta$.

La recherche des petits déplacements des points de l'axe d'une pièce courbe à double courbure est ainsi ramenée aux quadratures, et l'on voit que le polynôme différentiel qui forme le premier membre de l'équation (2) est intégrable quand, après l'avoir multiplié par dz ou dy, on le divise par $(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2$.

MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

A L'AIDE DES DIFFÉRENTIELLES A INDICES QUELCONQUES[*];

PAR J.-A. SERRET.

I.

La première idée des différentielles à indices quelconques remonte à Leibnitz, et cependant plus d'un siècle s'est écoulé sans qu'elle ait produit aucun résultat; car, bien qu'il soit plusieurs fois question de ces différentielles dans les ouvrages d'Euler, de Laplace et de Fourier, ce n'est que dans ces derniers temps que M. Liouville en a nettement fixé le sens et indiqué les principaux usages. Les Mémoires qu'il a écrits sur ce sujet, et en particulier son beau théorème des fonctions complémentaires, dissipant enfin le vague dont cette théorie était enveloppée, ont étendu le champ de l'analyse en permettant de donner aux formules toute la généralité qu'elles comportent et en multipliant les moyens de transformation. De là des ressources inattendues pour la solution d'un grand nombre de questions qu'on aborderait difficilement par les méthodes de l'analyse ordinaire. « Ces ex- » pressions (les dérivées à indices quelconques), dit avec raison » M. Liouville, dont il est aisé de fixer avec clarté le sens véritable, » ne sont pas seulement curieuses à étudier sous le rapport mathé- » matique et purement spéculatif : leur représentation existe dans la » nature, et l'on peut citer des questions de géométrie et de physique » où leur usage est amené sans effort, et paraît même indispensable. »

Dans le Mémoire inséré au XXIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 163, M. Liouville a montré comment on pou-

[*] Ce Mémoire est extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 458. Toutefois quelques légères modifications ont été introduites dans cette nouvelle rédaction.

vait appliquer avec fruit le calcul des différentielles à indices quelconques à l'intégration des équations différentielles. Sa méthode consiste à regarder la fonction que l'on cherche comme la dérivée à indice quelconque d'une fonction plus simple, et à profiter de l'indétermination de cet indice pour simplifier l'équation transformée. Cette méthode réussit dans un grand nombre de cas, mais dans beaucoup d'autres; avant de l'appliquer, il est nécessaire de faire subir aux équations des transformations convenables. On verra dans ce Mémoire en quoi consistent ces transformations.

II.

On rencontre à chaque pas, dans les questions de physique mathématique, et spécialement dans la théorie de la chaleur, une équation différentielle à laquelle on peut toujours ramener l'équation célèbre de Riccati, et dont plusieurs géomètres se sont occupés.

Cette équation est la suivante.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0, \tag{1}$$

dans laquelle m et n représentent des constantes tout à fait quelconques. On sait que si n est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale complète de cette équation peut être obtenue sous forme finie; mais on n'a pas encore donné à cette intégrale la forme si simple et si élégante qu'elle est susceptible de prendre dans ce cas particulier, forme que les principes du nouveau calcul maintiennent invariable pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires des paramètres m et n.

Je me propose spécialement, dans ce Mémoire, d'appliquer les principes du calcul des différentielles à indices quelconques, à l'intégration de cette équation différentielle; mais, avant d'entrer dans l'exposition de la méthode, je dirai en peu de mots comment j'ai été conduit à cette recherche.

III.

Désignons par y la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha$;

M. Catalan et moi [*] avons montré, par des moyens différents, que cette intégrale peut être obtenue sous forme finie, lorsque n est un nombre entier; et j'ai fait voir, en outre, que la formule donnée par M. Catalan a encore lieu pour les valeurs fractionnaires de n.

La méthode suivie par M. Catalan repose sur ce que y satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre $2(n+1)$, ce qui suppose nécessairement n entier; je vais montrer que, quel que soit n, y satisfait toujours à une équation linéaire du deuxième ordre.

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\sin \alpha x}{x(1+\alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x} \int \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{2(n+1)}{x} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha.$$

ou

$$yx = 2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

différentiant deux fois par rapport à x, on a

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha^3 d\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} - yx = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha;$$

or

$$-\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} - yx = 2(n+1) \frac{dy}{dx},$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, p. 110; t. VIII, p. 20.

équation qui coïnciderait avec l'équation (1) si l'on y changeait n en $-n$, et x en mx.

Rien n'est plus simple que de déterminer l'intégrale complète de l'équation (2) et, par suite, la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$, en supposant n entier et positif.

Si l'on pose

$$y = ze^{\mu x},$$

μ étant l'une des racines carrées de l'unité, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad x\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx}\right) - 2n\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Intégrons cette équation par la méthode des coefficients indéterminés, et soit, s'il est possible,

$$z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots.$$

La substitution de cette valeur de z dans l'équation (3) fournit la relation suivante entre les coefficients a_{p+1} et a_p de deux termes consécutifs quelconques :

$$(4) \qquad (p+1)(2n-p)a_{p+1} = -2\mu(n-p)a_p.$$

Cette relation fera connaître les rapports des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au premier a_0, lequel est tout à fait arbitraire; elle montre, en outre, que les coefficients $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}$ sont nuls, et que le suivant a_{2n} est arbitraire; elle donnera enfin les rapports de tous les autres à ce dernier.

Il résulte de là que, n étant entier, l'intégrale complète de l'équation (3) sera

$$z = \frac{A}{a_0}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)$$
$$+ \frac{A'}{a_{2n}}(a_{2n}x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots),$$

A et A' étant deux constantes arbitraires, et $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$ des constantes

déterminées et déduites de l'équation (4). La première partie de cette valeur de z est seule composée d'un nombre limité de termes.

On voit enfin que l'on obtiendra une intégrale particulière de l'équation (2) en posant

$$y = \frac{A}{a_0} e^{\mu x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$

formule dans laquelle μ a l'une des valeurs $+1$ ou -1.

L'intégrale générale sera donc

$$y = \frac{A}{a_0} e^{-x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$$
$$+ \frac{B}{a_0} e^{x}(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots \pm a_n x^n),$$

A et B étant deux constantes arbitraires et les rapports $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$ devant satisfaire l'équation générale

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = 2\frac{n-p}{(p+1)(2n-p)}.$$

On déduit aisément de là la valeur du terme général $\frac{a_p}{a_0}$, savoir,

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{2^p}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{2n.(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p+1)};$$

ou, en représentant par $\Gamma(q)$ le produit des $(q-1)$ premiers nombres entiers,

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} 2^p \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)}.$$

On aura ainsi pour l'intégrale complète de l'équation (2),

$$y = A e^{-x} \sum_0^n \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)} (2x)^p$$
$$+ B e^{x} \sum_0^n \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)} (-2x)^p,$$

en mettant simplement A et B au lieu de $\frac{A\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$, $\frac{B\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$.

Il est aisé de déduire de là la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$, mais je ne m'arrêterai pas à cette recherche, ayant voulu seulement faire voir que cette intégrale ne dépendait que de l'intégration d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

IV.

La méthode qui vient d'être exposée revient, en dernière analyse, à intégrer l'équation (2) supposée dépourvue du terme en $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$y = Ce^{-x} + C'e^{x},$$

puis à faire varier les constantes C et C', de manière à obtenir l'intégrale complète de l'équation (2).

C'est cette même marche que je vais suivre dans la recherche de l'intégrale générale de l'équation (1), où je supposerai les constantes m et n quelconques. Pour tout ce qui concerne l'exposition des principes du calcul des différentielles à indices quelconques, on devra consulter les Mémoires de M. Liouville insérés dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique* et dans le Journal de M. Crelle; je me bornerai ici à rappeler la définition de ces différentielles.

Si y désigne une fonction de x développable en série d'exponentielles réelles ou imaginaires, finies ou infiniment petites, et si $\sum A e^{ax}$ représente ce développement, en sorte qu'on ait

$$y = \sum A e^{ax},$$

nous appellerons, avec M. Liouville, dérivée d'ordre p de la fonction y, la nouvelle fonction $\sum A a^p e^{ax}$, qu'on déduit de la première en multipliant chaque terme par la puissance p du coefficient de x; ainsi, l'on aura

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \sum A a^p e^{ax},$$

quelle que soit la constante p, positive, négative, entière, fractionnaire, irrationnelle ou même imaginaire.

Quelquefois aussi, et surtout quand p est négatif, M. Liouville remplace la notation $\frac{d^p y}{dx^p}$ par $\int^{-p} y\,dx^{-p}$, qu'il appelle intégrale à indice $-p$ de la fonction y. Il est presque superflu d'ajouter que cette définition, dans le cas de p entier, rentre tout à fait dans celle qu'on donne en analyse, en sorte que les formules du nouveau calcul s'appliqueront sans difficulté aux dérivées ordinaires.

V.

Si l'on pose, comme précédemment,

$$y = ze^{\mu x},$$

l'équation (1) devient

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right) + \frac{2n}{x}\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) - m^2 z = 0,$$

et en déterminant μ par l'équation $\mu^2 - m^2 = 0$,

$$(5)\qquad x\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx}\right) + 2n\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Il est clair qu'il suffira de connaître une intégrale particulière de l'équation (5) pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (1) [*].

Si l'on pose

$$z = \frac{d^p \theta}{dx^p},$$

p étant une quantité quelconque à laquelle nous attribuerons plus tard une valeur particulière, l'équation (5) devient

$$(6)\qquad x\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} + 2\mu x\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} + 2n\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} + 2\mu n\frac{d^p\theta}{dx^p} = 0.$$

---

[*] En réalité, l'équation (5), en adoptant les deux valeurs de μ, donne lieu à deux équations différentielles distinctes, et il est nécessaire de connaître une intégrale particulière de chacune de ces équations.

Pour avoir l'intégrale à indice λ du premier membre de cette équation, nous nous servirons de la formule suivante, qui sert à intégrer le produit de deux facteurs [*] :

$$\int^{\lambda} \varphi\varphi_1 dx^{\lambda} = \varphi_1 \int^{\lambda} \varphi dx^{\lambda} - \frac{\lambda}{1}\frac{d\varphi_1}{dx}\int^{\lambda+1} \varphi dx^{\lambda+1}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\int^{\lambda+2} \varphi dx^{\lambda+2} - \ldots.$$

On voit que le nombre des termes du second membre sera limité toutes les fois que φ_1 sera une fonction rationnelle et entière.

On aura donc

$$\int^{p+1} x\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} dx^{p+2} = x\frac{d\theta}{dx} - (p+1)\theta,$$
$$\int^{p+1} x\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} dx^{p+1} = x\theta - (p+1)\int\theta\, dx.$$

D'après cela, l'intégrale à indice $(p+1)$ du premier membre de l'équation (6) sera

$$x\frac{d\theta}{dx} + 2\mu x\theta + (2n-p-1)\theta + 2\mu(n-p-1)\int\theta dx.$$

Si donc on désigne par ψ la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^{p+1}\psi}{dx^{p+1}} = 0,$$

on aura

$$x\frac{d\theta}{dx} + 2\mu x\theta + (2n-p-1)\theta + 2\mu(n-p-1)\int\theta dx = \psi;$$

si l'on pose maintenant $p = n-1$, le terme $\int\theta dx$ disparaîtra, et l'équation en θ, réduite au premier ordre, deviendra

$$(7) \qquad x\frac{d\theta}{dx} + (2\mu x + n)\theta = \psi:$$

la fonction ψ satisfait à l'équation

$$\frac{d^n\psi}{dx^n} = 0.$$

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXIe cahier, p. 166.

et la valeur de z sera donnée en même temps que celle de θ, au moyen de la formule

$$z = \frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}}.$$

La fonction complémentaire ψ est nulle si n est entier et négatif; elle renferme n constantes arbitraires si n est entier et positif; dans tout autre cas elle en renferme un nombre arbitraire, mais limité : au surplus, nous n'avons pas à nous occuper ici de cette question.

La supposition de ψ nul dans l'équation (7) ne fera qu'altérer la généralité de la valeur de θ, mais cela importe peu, puisque nous n'avons besoin que d'une valeur particulière de z.

Si donc on fait $\psi = 0$, l'équation (7) devient

$$x\frac{d\theta}{dx} + (2\mu x + n)\,\theta = 0, \tag{8}$$

ou

$$\frac{d\theta}{\theta} + \left(2\mu + \frac{n}{x}\right) dx = 0,$$

d'où

$$\theta = Ae^{-2\mu x}\,x^{-n},$$

A désignant une constante arbitraire.

On aura donc une intégrale particulière de l'équation (5) en posant

$$z = A\,\frac{d^{n-1}\left(e^{-2\mu x}x^{-n}\right)}{dx^{n-1}}. \tag{9}$$

VI.

L'intégrale de l'équation (8) fait connaître immédiatement celle de l'équation (7) par la méthode de la variation des constantes; on trouve ainsi que la valeur la plus générale de θ qui satisfait à l'équation (7) ou à l'équation (6) est

$$\theta = Ae^{-2\mu x}x^{-n} + e^{-2\mu x}x^{-n}\int e^{2\mu x}x^{n-1}\,\psi dx, \tag{10}$$

ψ étant, comme nous l'avons dit, la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^n\psi}{dx^n} = 0;$$

si n est un nombre entier, la fonction ψ renferme n constantes arbitraires, et l'équation (10) donne pour φ une expression renfermant $n+1$ constantes arbitraires, comme cela doit être.

VII.

Il résulte de ce qui précède qu'on satisfera à l'équation (1) en posant

$$(11) \qquad y = Ae^{\mu x} \frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x} x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

μ étant l'une des racines de l'équation

$$\mu^2 - m^2 = 0;$$

l'intégrale générale sera donc

$$(12) \qquad y = A e^{mx} \frac{d^{n-1}(e^{-2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}} + Be^{-mx} \frac{d^{n-1}(e^{2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Telle est la forme simple et remarquable sous laquelle se présente la valeur générale de y, valeur que l'on pourra aisément calculer toutes les fois que n sera un nombre entier, mais qu'il importe de savoir transformer.

Nous allons examiner successivement les deux cas bien distincts qui peuvent se présenter.

VIII.

Supposons n positif ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant positif.

On a

$$x^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-ux} u^{n-1} du,$$

$\Gamma(n)$ désignant, suivant l'habitude, l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du.$$

D'après cela, l'équation (11) devient, en mettant simplement A au

lieu de $\frac{A}{\Gamma(n)}$,

$$y = A e^{\mu x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^\infty e^{-(u+2\mu)x} u^{n-1} du;$$

or

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^\infty e^{-(u+2\mu)x} u^{n-1} du$$

$$= (-1)^{n-1} \int_0^\infty e^{-(u+2\mu)x} u^{n-1} (u+2\mu)^{n-1} du,$$

donc

$$(13) \qquad y = A e^{-\mu x} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-1} (u+2\mu)^{n-1} du.$$

Telle est l'équation qui, dans le cas de n positif, remplacera l'équation (11).

On en déduit, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$(14) \qquad \begin{cases} y = A e^{-mx} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-1} (u+2m)^{n-1} du \\ \quad + B e^{mx} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-1} (u-2m)^{n-1} du. \end{cases}$$

Si, par exemple, $n = 1$, on a

$$y = \frac{A e^{-mx} + B e^{mx}}{x};$$

si $n = 2$,

$$y = A e^{-mx} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{m}{x^2}\right) + B e^{mx} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{m}{x^2}\right),$$

valeurs qu'on peut aisément vérifier.

On voit en général que la valeur de y s'obtiendra sous forme finie si n est un nombre entier, et que dans aucun cas les intégrales définies de l'équation (14) ne deviendront infinies.

On peut aisément vérifier à posteriori l'exactitude des résultats auxquels nous sommes parvenus.

En effet, si l'on pose

$$y = \int_{u_0}^{u_1} e^{-(\mu+u)x} u^{n-1} (u+2\mu)^{n-1} du,$$

u_0 et u_1 étant indépendants de x, et qu'on porte cette valeur dans l'équation (1), le résultat de la substitution donne

$$e^{-(\mu+u_1)x}u_1^n(u_1+2\mu)^n - e^{-(\mu+u_0)x}u_0^n(u_0+2\mu)^n = 0,$$

équation qui sera satisfaite si l'on fait

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = \infty.$$

On satisfera encore à l'équation précédente en posant

$$u_0 = 0, \quad u_1 + 2\mu = 0,$$

ou bien

$$u_0 + 2\mu = 0, \quad \text{et} \quad u_1 = \infty;$$

en sorte qu'on pourra prendre pour valeur générale de y,

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= Ae^{-mx}\int_0^\infty e^{-xu}u^{n-1}(2m+u)^{n-1}\,du \\ &\quad + Be^{mx}\int_0^{2m} e^{-xu}u^{n-1}(2m-u)^{n-1}\,du, \end{aligned} \right.$$

expression qui sera souvent plus commode que celle fournie par l'équation (14), et qui, du reste, peut être aisément déduite de cette dernière.

Il est clair que l'équation (14) subsiste quelle que soit la constante m réelle ou imaginaire.

IX.

Avant d'examiner le cas de n négatif, il est nécesaire de rappeler une formule importante due à M. Liouville [*], qui sert à transformer en intégrale définie, une intégrale à indice positif ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant positif.

Cette formule est la suivante :

$$(16) \qquad \int^p \varphi(x)\,dx^p = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)}\int_0^\infty \varphi(x+u)u^{p-1}\,du.$$

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXIe cahier, p. 8.

L'exactitude de cette formule exige que la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x = \infty$, ou, en d'autres termes, que le développement de $\varphi(x)$ en série d'exponentielles $\sum A_a e^{ax}$ ne renferme que des exposants négatifs ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant une quantité négative.

Il existe toutefois une formule analogue à la précédente et qui donne le moyen de transformer $\int^p \varphi(x)dx^p$, lorsque la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x = -\infty$, ou que son développement en série d'exponentielles ne renferme que des exposants positifs ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant une quantité positive.

Supposons en effet a de cette forme dans l'équation

$$\varphi(x) = \sum A_a e^{ax},$$

et soit

$$X = \int_0^\infty \varphi(x-u)u^{p-1}du;$$

on aura

$$X = \int_0^\infty \sum A_a e^{a(x-u)} u^{p-1}\, du,$$

ou, en intégrant sous le signe $\sum$,

$$X = \sum A_a e^{ax} \int_0^\infty e^{-au} u^{p-1}\, du.$$

Or, la partie réelle de a étant positive, on a

$$\int_0^\infty e^{-au}u^{p-1}du = \frac{\Gamma(p)}{a^p};$$

donc

$$X = \Gamma(p) \sum \frac{A_a e^{ax}}{a^p} = \Gamma(p) \int^p \varphi(x)dx^p;$$

et, en remettant au lieu de X sa valeur,

$$(17) \qquad \int^p \varphi(x)dx^p = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \varphi(x-u)u^{p-1}\, du.$$

Cette démonstration est semblable à celle que M. Liouville a donnée de l'équation (16).

Il ne faut pas oublier que les formules (16) et (17) n'ont lieu, la première, que si $\varphi(\infty) = 0$, et la deuxième, que si $\varphi(-\infty) = 0$.

X.

Examinons maintenant la forme de l'intégrale générale de l'équation (1) quand n est négatif, ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant négatif. Si l'on change n en $-n$, les équations (1) et (11) deviennent

$$(1\ bis)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

$$(11\ bis)\qquad y = Ae^{\mu x}\int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1}.$$

L'équation (11 *bis*) fait connaître deux intégrales particulières de l'équation (1 *bis*) correspondantes aux deux valeurs de μ, et par suite l'intégrale générale.

Si donc on remplace μ successivement par $+m$ et $-m$ dans l'équation (11 *bis*), on aura pour l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*),

$$(18)\qquad y = Ae^{mx}\int^{n+1} e^{-2mx} x^n dx^{n+1} + Be^{-mx}\int^{n+1} e^{2mx} x^n dx^{n+1},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Si m est réel ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α n'étant pas nul, on aura, en vertu des formules (16) et (17),

$$\int^{n+1} e^{-2mx} x^n dx^{n+1} = \frac{1}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-2m(x+u)}(x+u)^n u^n du,$$

$$\int^{n+1} e^{2mx} x^n dx^{n+1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{2m(x-u)}(x-u)^n u^n du,$$

et l'équation (18) devient, en mettant simplement A et B au lieu de $\frac{A}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)}$, $\frac{B}{\Gamma(n+1)}$,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= Ae^{-mx}\int_0^\infty e^{-2mu}(x-u)^n u^n du \\ &\quad + Be^{mx}\int_0^\infty e^{-2mu}(x-u)^n u^n du. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'intégrale complète de l'équation (1 *bis*) dans le cas de n positif ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant positif.

Les deux intégrales définies qui y entrent, ne deviendront jamais infinies, même si m était de la forme $\beta\sqrt{-1}$; mais il est évident que, dans ce cas, les formules (16) et (17) cessent d'avoir lieu, et l'équation (19) ne représente plus l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*).

Si $n = 1$, on trouve

$$y = \mathrm{A}\,e^{-mx}(mx + 1) + \mathrm{B}e^{mx}(mx - 1);$$

si $n = 2$,

$$y = \mathrm{A}\,e^{-mx}(m^2x^2 + 3mx + 3) + \mathrm{B}e^{-mx}(m^2x^2 - 3mx + 3),$$

valeurs qu'il est aisé de vérifier.

En général, on voit que la valeur de y s'obtiendra sous forme finie toutes les fois que n sera un nombre entier.

La substitution dans l'équation (1 *bis*) de la valeur de y, fournie par l'équation (13), s'effectue très-simplement; mais le résultat de cette substitution n'est nul, ainsi que nous l'avions prévu, que si m est réel ou au moins de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α n'étant pas nul.

Ce dernier cas ne saurait offrir aucune difficulté, et on le ramène au précédent; effectivement, si l'on change m en $m\sqrt{-1}$, l'équation (1 *bis*) devient

$$(1\ ter)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + m^2y = 0,$$

dans laquelle m est une quantité réelle.

Or, si dans cette dernière on change x en $x\sqrt{-1}$, on retombe précisément sur l'équation (1 *bis*); on obtiendra donc l'intégrale de l'équation (1 *ter*) en changeant x en $x\sqrt{-1}$ dans l'équation (19). On aura ainsi

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \mathrm{A}\,e^{-mx\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-2mu}(x\sqrt{-1} + u)^n u^n\,du \\ &\quad + \mathrm{B}\,e^{mx\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-2mu}(x\sqrt{-1} - u)^n u^n\,du, \end{aligned}\right.$$

résultat qui, comme les précédents, est très-facile à vérifier à posteriori.

XI.

Nous avons déduit de l'équation (12), qui exprime dans tous les cas l'intégrale générale de l'équation (1), deux autres formes de cette intégrale générale, évaluées au moyen d'intégrales définies, facilement exprimables à l'aide des transcendantes eulériennes, et qui ont l'avantage de ne jamais devenir infinies. Toutefois, ainsi que nous l'avons déjà dit, si $n = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, la première exige que α soit positif, et la seconde qu'il soit négatif.

Ces deux cas, que nous avons examinés séparément, et que nous avons traités par des méthodes différentes, peuvent aisément se ramener l'un à l'autre, en sorte que l'intégrale de l'équation (1) étant connue dans l'un de ces cas, on la connaîtra aussi dans le second.

Soit

$$y = \mathrm{F}(n, x)$$

l'intégrale générale de l'équation (1), dans laquelle on suppose n tout à fait quelconque; si l'on change n en $-n$, on retombera sur l'équation (1 *bis*), dont l'intégrale générale sera

$$y = \mathrm{F}(-n, x);$$

or, il est facile de voir quel changement éprouve la fonction F, quand on y change n en $-n$; si, en effet, on pose

$$y = x^{2n+1} z,$$

l'équation (1 *bis*) devient

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dz}{dx} - m^2 z = 0,$$

dont l'intégrale générale sera

$$z = \mathrm{F}[(n+1), x].$$

L'intégrale générale de l'équation (1 *bis*) sera donc

$$y = x^{2n+1}\,\mathrm{F}[(n+1), x].$$

Il est évident que l'équation

$$F(-n, x) = x^{2n+1} F[n+1, x]$$

a lieu, que F soit ou non l'intégrale générale de l'équation (1); si donc on prend

$$F(-n, x) = A e^{\mu x} \int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1}.$$

$$F(n+1, x) = A' e^{\mu x} \frac{d^n (e^{-2\mu x} x^{-n-1})}{dx^n},$$

on aura cette formule remarquable, au moyen de laquelle une intégrale se trouve exprimée par une différentielle,

$$\int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1} = C x^{2n+1} \frac{d^n (e^{-2\mu x} x^{-n-1})}{dx^n}.$$

La constante C se détermine aisément; on trouve

$$C = \left(\frac{-1}{2\mu}\right)^{2n+1}.$$

Si dans l'équation précédente on fait $e^{-2\mu x} = X$, elle devient

$$\frac{1}{x^{n+1}} \int^{n+1} X x^n dx^{n+1} = \frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \int^{2n+1} X dx^{2n+1}.$$

et cette formule a évidemment lieu quelle que soit la fonction X.

On peut renfermer dans un même type les intégrales de toutes les équations différentielles (1) quand n varie.

Si, en effet, on pose

$$C = A \frac{d^{n-1}(e^{2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}}, \quad C' = B \frac{d^{n-1}(e^{-2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

l'équation (12) deviendra

$$y = C e^{-mx} + C' e^{mx}.$$

XII.

Dans le cas de $m = 1$, on satisfait à l'équation (1 *bis*) en posant

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha;$$

et, comme cette valeur de y ne peut croître indéfiniment avec x, on

aura évidemment, en ayant égard à l'équation (19),

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha = A e^{-x} \int_0^\infty e^{-2u}(x+u)^n u^n\, du.$$

Pour déterminer A, soit $x = 0$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{n+1}} = A \int_0^\infty e^{-2u} u^{2n} du,$$

d'où

$$A = \frac{\pi}{[\Gamma(n+1)]^2};$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha = \frac{\pi e^{-x}}{[\Gamma(n+1)]^2} \int_0^\infty e^{-2u}(x+u)^n u^n\, du,$$

formule que j'ai démontrée directement [*].

XIII.

Les résultats qui précèdent et ceux que M. Liouville, et après lui d'autres géomètres, ont obtenus [**], montrent clairement, non-seulement l'utilité, mais encore la nécessité incontestable de l'intervention du calcul des différentielles à indices quelconques dans une multitude de questions d'analyse et de physique mathématique. Et, en effet, une équation différentielle étant donnée, la fonction qui doit lui satisfaire est, en général, une fonction continue, non-seulement de la variable indépendante, mais aussi des paramètres qui entrent dans l'équation différentielle. D'ailleurs ces paramètres peuvent entrer dans l'équation intégrale comme indices de différentiation. Si l'on veut se borner au cas particulier où ils sont entiers et positifs, on détruit la généralité des formules en renonçant gratuitement à la continuité qu'elles présentent d'elles-mêmes.

Nous citerons un exemple célèbre à l'appui de cette assertion.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII, p. 20.

[**] Plusieurs géomètres se sont occupés, dans ces derniers temps, des applications du calcul des différentielles à indices quelconques. Nous citerons en particulier les travaux de MM. Svanberg, Kummer et Jurgensen, publiés à Berlin, par M. Crelle.

XIV.

Si l'on développe la fonction $(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances entières et positives de r, le coefficient X_n de r^n sera une fonction rationnelle et entière de x, qui satisfait, comme on sait, à l'équation différentielle

$$(21) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2y}{d^2x} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

D'après cela, n étant entier, on sait encore, et il est facile de le vérifier, que l'intégrale générale de l'équation précédente sera

$$y = X_n\left[A + B\int\frac{dx}{(1 - x^2)X_n^2}\right]:$$

cette valeur de y suppose nécessairement n entier et positif, mais la forme que M. Rodrigues a donnée de l'intégrale complète de l'équation (21) est tout à fait à l'abri de cette particularisation [*].

Si l'on pose

$$y = \frac{d^p\theta}{dx^p},$$

l'équation (21) devient

$$(1 - x^2)\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} - 2x\frac{d^p\theta}{dx^p} + n(n+1)\frac{d^p\theta}{dx^p} = 0,$$

et, en prenant l'intégrale de l'ordre $(p+1)$,

$$(1 - x^2)\frac{d\theta}{dx} + 2px\theta + [p(p+1) - n(n+1)]\int\theta\,dx = \psi,$$

la fonction ψ devant satisfaire à l'équation

$$\frac{d^p\psi}{dx^p} = 0.$$

Si l'on pose

$$p(p+1) - n(n+1) = 0,$$

[*] L'équation (21) rentre dans la classe d'équations que M. Liouville a étudiée, XXIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

on a, en négligeant la fonction ψ,

$$(1 - x^2)\frac{d\theta}{dx} + 2px\theta = 0,$$

d'où

$$\theta = A(1 - x^2)^p,$$

et par suite

$$y = A\frac{d^p(1 - x^2)^p}{dx^p}.$$

Or les deux valeurs de p sont $p = n$ et $p = -(n+1)$; l'intégrale générale de l'équation (21) sera donc

$$(22) \qquad y = A\frac{d^n(1 - x^2)^n}{dx^n} + B\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1 - x^2)^{n+1}}.$$

Telle est la formule donnée par M. Rodrigues; elle constitue, dans tous les cas, l'intégrale générale de l'équation (21); si n est entier, la première partie ne diffère de X_n que par un coefficient constant.

On pourrait arriver à l'intégrale complète (22), si l'on connaissait l'une des intégrales particulières de l'équation (21). Soit, en effet,

$$y = A\frac{d^n(1 - x^2)^n}{dx^n}.$$

Si l'on change n en $-n$ dans cette équation ainsi que dans l'équation (21), on aura

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (n-1)ny = 0,$$

équation qui sera satisfaite par

$$y = A\int^n\frac{dx^n}{(1 - x^2)^n};$$

on satisfera donc à l'équation (21) en posant

$$y = A\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1 - x^2)^{n+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

XV.

Les résultats qui précèdent sont parfaitement connus, et je ne les ai rappelés que pour montrer l'heureuse intervention du nouveau calcul

dans un genre de questions qui ont si vivement préoccupé nos plus illustres géomètres. On sait, en effet, que les fonctions X_n, dont nous venons de parler, ne sont qu'un cas particulier des fonctions Y_n de Laplace, fonctions sur lesquelles repose entièrement la théorie des attractions et qui jouent un si grand rôle dans la *Mécanique céleste*.

Dans un grand nombre de cas les difficultés qu'on rencontre dans les applications du calcul des différentielles à indices quelconques, se réduisent à trouver les développements des fonctions en séries d'exponentielles. Il ne peut exister à cet égard de règle générale; quelquefois il sera nécessaire d'introduire des intégrales définies multiples : nous allons en trouver un exemple dans la transformation des intégrales particulières de l'équation (21).

XVI.

Si x est > 1, on a

$$\frac{1}{(x-1)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-\theta(x-1)}\theta^n\,d\theta,$$

$$\frac{1}{(x+1)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-\varphi(x+1)}\varphi^n\,d\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(-1)^{n+1}\Gamma^2(n+1)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{(\theta-\varphi)}\theta^n\varphi^n\,d\theta\,d\varphi\,e^{-(\theta+\varphi)x};$$

on aura donc, en vertu de la définition des différentielles à indices quelconques,

$$\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(-1)^{2n+2}\Gamma^2(n+1)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{(\theta-\varphi)}\theta^n\varphi^n\,d\theta\,d\varphi\,\frac{e^{-(\theta+\varphi)x}}{(\theta+\varphi)^{n+1}};$$

et si l'on pose

$$\theta = \varphi\,\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad d\theta = \varphi\,\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\frac{d\omega}{\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

cette équation devient

$$\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(-1)^{2n+2}\Gamma^2(n+1)}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\frac{\omega}{2}\frac{d\omega}{\cos\frac{\omega}{2}}\int_0^\infty e^{-\varphi\frac{x+\cos\omega}{\cos^2\frac{\omega}{2}}}\varphi^n\,d\varphi.$$

D'ailleurs l'intégrale définie relative à φ a pour valeur

$$\Gamma(n+1)\frac{\cos^{2n+2}\frac{\omega}{2}}{(x+\cos\omega)^{n+1}},$$

et l'on aura, toute réduction faite,

$$\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}=\frac{-1}{(-2)^{2n+1}\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n+1}\omega}{(x+\cos\omega)^{n+1}}\,d\omega.$$

Mais cette formule ne peut donner que les valeurs de $\int^{n+1}\frac{dx^{n+}}{(1-x^2)^{n+1}}$ qui correspondent aux valeurs de x plus grandes que 1. On eût obtenu une formule applicable à tous les cas en employant un développement différent pour la fonction $\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$.

Si, par exemple, on prend

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}}=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty}e^{-\theta(1+x)}\theta^n\,d\theta,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}=\frac{(-\sqrt{-1})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty}e^{\varphi(1-x)\sqrt{-1}}\varphi^n\,d\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}=\frac{(-\sqrt{-1})^{n+1}}{\Gamma^2(n+1)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(\theta-\varphi\sqrt{-1})}\theta^n\varphi^n\,d\theta\,d\varphi\,e^{-x(\theta+\varphi\sqrt{-1})},$$

et qu'on opère sur ce développement exponentiel, comme nous l'avons fait précédemment, on trouvera sans difficulté

$$\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}=\frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{2^{n+1}\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^n\omega\,d\omega}{(1+xe^{\omega\sqrt{-1}})^n},$$

formule qui fera connaître la valeur de $\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}$ correspondante à une valeur quelconque de x.

XVII.

Dans bien des cas la transformation des différentielles à indices quelconques, en intégrales définies, exige des calculs fort longs; mais il arrive souvent que cette transformation, effectuée dans l'hypothèse particulière où les indices sont entiers, conduit à des résultats exacts dans tous les cas.

Quand cette particularisation momentanée doit apporter des simplifications notables, on devra toujours s'y soumettre, sauf ensuite à discuter la généralité des résultats obtenus.

L'application de ce qui précède conduit immédiatement à la valeur générale de la seconde des intégrales particulières de l'équation (21).

n étant un nombre entier, on a, par la formule du binôme,

$$(x^2-1)^n = \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)}(-1)^p x^{2n-2p}.$$

d'où

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \sum \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2n-2p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)\Gamma(n-2p+1)}(-1)^p x^{n-2p}.$$

D'ailleurs

$$\frac{\Gamma(2n-2p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p+1)}\int_0^\infty \frac{\theta^{2p}\,d\theta}{(1+\theta^2)^{n+1}},$$

donc

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^{n+1}}\sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(n-2p+1)}x^{n-2p}(\theta\sqrt{-1})^{2p};$$

mais l'expression

$$\sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(n-2p+1)}x^{n-2p}(\theta\sqrt{-1})^{2p} = \sum \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots 2p}x^{n-2p}(\theta\sqrt{-1})^{2p}$$

n'est autre que la partie réelle de $(x \pm \theta\sqrt{-1})^n$; on aura donc

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{2^{2n}\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{(x+\theta\sqrt{-1})^n + (x-\theta\sqrt{-1})^n}{(1+\theta^2)^{n+1}}\,d\theta,$$

et il est très-facile de s'assurer que l'équation (21) est satisfaite, quel que soit n, en posant

$$y = A\int_0^\infty \frac{(x+\theta\sqrt{-1})^n + (x-\theta\sqrt{-1})^n}{(1+\theta^2)^{n+1}}\,d\theta\,[*],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y = Ax^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega\cos n\omega}{(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)^{n+1}}\,d\omega.$$

---

[*] Cette formule a été donnée par M. Wantzel, dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 1191.

XVIII.

Il résulte de ce qui précède que si n est positif, l'intégrale générale de l'équation (21) sera

$$y = \mathrm{A}x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega\cos n\omega}{(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)^{n+1}}\,d\omega + \mathrm{B}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n+1}\omega}{(x+\cos\omega)^{n+1}}\,d\omega;$$

seulement, ainsi que je l'ai dit, la seconde de ces intégrales ne peut subsister que pour les valeurs de x supérieures à 1.

La forme de cette intégrale générale sera la même si n et $n+1$ sont négatifs, car le changement de n en $-n$ ou de n en $n-1$ produit le même changement dans l'équation (21).

Si n est négatif et $n+1$ positif, l'intégrale devient, en changeant le signe de n,

$$y = \mathrm{A}\int^{n} \frac{dx^n}{(1-x^2)^n} + \mathrm{B}\int^{1-n} \frac{dx^{1-n}}{(1-x^2)^{1-n}},$$

ou

$$y = \mathrm{A}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n-1}\omega\,d\omega}{(x+\cos\omega)^n} + \mathrm{B}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{1-2n}\omega}{(x+\cos\omega)^{1-n}}\,d\omega.$$

Ces deux intégrales deviennent identiques dans le cas particulier de $n = \frac{1}{2}$; mais en posant $1-2n = h$, et faisant tendre h vers 0, on déduit aisément de l'équation précédente la valeur suivante de y qui correspond à ce cas particulier,

$$y = \mathrm{A}\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{x+\cos\omega}} + \mathrm{B}\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{x+\cos\omega}}\,l\,\frac{\sin\omega}{\sqrt{x+\cos\omega}}.$$

Enfin, comme le paramètre $n(n+1)$ de l'équation (21) peut être réel pour des valeurs imaginaires de n, on est nécessairement conduit dans cette question à la considération des différentielles à indices imaginaires; les formules que nous avons données sont encore applicables dans ce cas, mais leur discussion présente peu d'intérêt.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE,

PAR M. OSSIAN BONNET.

I.

Considérons une chaîne parfaitement flexible et homogene, ayant partout une égale épaisseur. Supposons ses extrémités fixées d'une manière invariable aux deux points A et B, et chacun de ses éléments sollicité par une force déterminée, assujettie à la seule condition de varier d'une manière continue tant en grandeur qu'en direction, quand on passe d'un élément à l'élément suivant; nous aurons, pour l'équilibre d'un élément quelconque, les trois équations connues

$$(1)\qquad \begin{cases} d.\left(\mathrm{T}\,\dfrac{dx}{ds}\right) + \mathrm{X}\,ds = 0, \\ d.\left(\mathrm{T}\,\dfrac{dy}{ds}\right) + \mathrm{Y}\,ds = 0, \\ d.\left(\mathrm{T}\,\dfrac{dz}{ds}\right) + \mathrm{Z}\,ds = 0; \end{cases}$$

x, y, z représentant les coordonnées rectangulaires d'un point de l'élément considéré, s l'arc de la chaîne compris entre un point fixe et le point variable (x, y, z), T la tension en ce dernier point. X, Y, Z les forces rapportées à l'unité de longueur et parallèles aux axes qui répondent au même point, et enfin, toutes les différentielles se rapportant à un même déplacement infiniment petit effectué sur la chaîne, dans un sens qui pourrait être quelconque, mais que nous supposerons toujours être celui dans lequel sont comptées les valeurs positives de s, pour fixer les idées et pour rendre positive la différentielle ds.

Si en vertu de la nature des forces X, Y, Z, et de la position des points fixes A et B, la courbe d'équilibre de la chaîne est plane, on pourra rapporter l'équilibre à deux axes situés dans le plan de cette

courbe, et alors il suffira de considérer les deux premières des équations (1).

C'est le cas que nous examinerons en premier lieu.

Développons les deux équations d'équilibre, il vient, en prenant s pour variable indépendante,

$$T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + X = 0,$$

$$T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} + Y = 0;$$

d'où

$$T = \frac{Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}},$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{X\frac{d^2y}{ds^2} - Y\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}},$$

et, en éliminant T,

$$(2)\qquad d.\left(\frac{Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}}\right) - \frac{X\frac{d^2y}{ds^2} - Y\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}}\,ds = 0.$$

Cette équation représente la courbe qu'affecte la chaîne dans la position d'équilibre.

On peut la mettre sous une forme plus simple.

s étant la variable indépendante, on a

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

d'ou

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}} = -\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} = \pm\frac{1}{\rho},$$

en appelant ρ le rayon de courbure, et observant que

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} = \frac{1}{\rho};$$

de là nous tirons

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \pm \frac{\frac{dy}{ds}}{\rho}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{\frac{dx}{ds}}{\rho}; \quad \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds^2} = \pm \frac{1}{\rho},$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris d'après la dernière relation, selon que la dérivée par rapport à s de $\frac{dy}{dx}$ est négative ou positive, c'est-à-dire suivant que la tangente de l'angle et par conséquent l'angle que fait avec la partie positive de l'axe des x la tangente à la courbe d'équilibre, va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement infiniment petit du point de contact, effectué sur la chaîne dans le sens où sont comptées les valeurs positives des arcs s.

Substituant dans l'équation (2), il vient

$$d.\left[\rho\left(Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}\right)\right] \pm \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right)ds = 0,$$

le signe $\pm$ étant déterminé comme il vient d'être dit.

Appelons maintenant R l'intensité de la force qui sollicite la chaîne au point x, y, z, et α l'angle positif que la direction de cette force fait avec la partie positive de l'axe des x; soit en même temps φ l'angle positif que fait avec la même partie de l'axe des x, la portion de la tangente à la chaîne obtenue en prolongeant l'élément de l'arc de cette chaîne dans le sens positif; on aura

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\sin\alpha,$$
$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi. \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

et l'égalité précédente deviendra

$$(3) \qquad d.[R\rho\sin(\alpha - \varphi)] \pm R\cos(\alpha - \varphi)\,ds = 0.$$

Si θ est l'angle plus petit que 180 degrés que fait la direction de la force R avec la portion de la tangente à la chaîne obtenue en prolongeant l'élément de l'arc dans le sens positif, on aura

$$\sin(\alpha - \varphi) = \pm\sin\theta, \quad \text{et} \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\theta,$$

le signe placé devant $\sin\theta$ étant $+$ ou $-$, selon que l'angle φ va en

diminuant ou en augmentant pour un déplacement infiniment petit effectué dans le sens des s positifs, ainsi qu'il est facile de s'en assurer en examinant toutes les positions qui peuvent se présenter et remarquant que la force R doit toujours agir dans la convexité de la chaîne.

Cela nous donne enfin, pour l'équation de la courbe d'équilibre de la chaîne,

$$(4) \qquad d.(\mathrm{R}\rho \sin\theta) + \mathrm{R}\cos\theta\, ds = 0.$$

Pour mettre plus d'uniformité dans nos calculs, nous emploierons toujours l'équation précédente quand nous voudrons connaître la figure d'équilibre d'une chaîne, la force étant donnée, ou réciproquement pour déterminer la force, quand nous connaîtrons la figure d'équilibre; nous devons dire seulement qu'il sera quelquefois plus avantageux d'opérer directement.

II.

Si nous supposons en premier lieu la force R normale à la courbe d'équilibre de la chaîne, nous aurons

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = 1, \quad \cos\theta = 0,$$

et l'équation (4) deviendra

$$\mathrm{R}\rho = c,$$

ce qui montre que la courbe d'équilibre dans le cas considéré a en chacun de ses points son rayon de courbure inversement proportionnel à la force, d'où l'on déduit que si la force est constante, la courbe sera un cercle, etc. Tous ces résultats sont connus.

III.

Supposons en second lieu la force R toujours parallèle à la même direction. Prenons pour partie positive de l'axe des x une parallèle à la force R, et pour partie positive de l'axe des y une perpendiculaire menée du côté où sont situées les portions des tangentes obtenues en prolongeant les éléments des arcs s dans le sens des valeurs positives de ces arcs. Il est facile de voir qu'alors, la force R étant toujours dans

la convexité de la chaîne, l'angle θ ira en croissant pour un déplacement fait sur la chaîne dans le sens des valeurs positives de s, et que l'on aura les différentielles se rapportant comme ci-dessus à un déplacement fait dans le même sens

$$ds = \rho d\theta;$$

cela étant, l'équation (4) deviendra

$$(5) \qquad d.(\mathrm{R}\rho \sin\theta) + \mathrm{R}\rho \cos\theta d\theta = 0.$$

Ce n'est que pour fixer les idées et pour arriver plus rapidement à l'équation précédente, que l'on a supposé la partie positive de l'axe des y dans un certain sens; mais il est facile de voir que l'équation (5) subsiste encore quand la partie positive des y est prise dans le sens opposé. Du reste, on peut établir cette équation d'une autre manière qui met en évidence ce que nous venons d'avancer.

Reprenons l'équation (3), et faisons dans cette équation $\alpha = 0$, il viendra

$$d.(\mathrm{R}\rho \sin\varphi) \mp \mathrm{R}\rho \cos\varphi ds = 0,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris suivant que φ va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement fait sur la chaîne dans le sens des s positifs; mais on a évidemment

$$ds = \mp \rho d\varphi,$$

le signe étant déterminé de la même manière; donc l'équation ci-dessus revient à

$$d.\mathrm{R}\rho \sin\varphi + \mathrm{R}\rho \cos\varphi d\varphi = 0;$$

d'ailleurs

$$\varphi = \theta, \quad \text{ou} \quad \varphi = 2\pi - \theta;$$

substituant, on trouve l'équation (5), qui se trouve ainsi établie pour tous les cas.

Développons l'équation (5), il viendra

$$\sin\theta d.\mathrm{R}\rho + 2\mathrm{R}\rho \cos\theta d\theta = 0,$$

d'où, intégrant,

$$(6) \qquad R\rho \sin^2\theta = C.$$

Faisons maintenant quelques hypothèses sur R; posons en premier lieu

$$R = a \sin^m \theta \text{ [*]},$$

l'équation (6) deviendra

$$(7) \qquad \rho \sin^{m+2}\theta = \frac{C}{a} = C';$$

mais

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{d\theta} = \frac{dx}{\cos\theta\, d\theta},$$

en remarquant que

$$y' = \operatorname{tang}\theta,$$

donc

$$\frac{dx}{C'} = \sin^{-(m+2)}\theta \cos\theta\, d\theta,$$

et, intégrant,

$$-\frac{(m+1)x}{C'} = \frac{x}{x_0} = \sin^{-(m+1)}\theta.$$

On ne met pas la constante qu'il serait toujours possible de faire disparaître en portant l'axe des y parallèlement à lui-même.

Remplaçant enfin $\sin\theta$ par sa valeur $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, il vient

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^{-(m+1)},$$

d'ou

$$(8) \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{m+1}} - 1}}.$$

[*] On a cette expression de la force quand on considère une voile flexible de forme rectangulaire dont deux côtés opposés sont fixes, et que l'on suppose la pression du vent en mouvement sur un élément fixe d'une surface, proportionnelle à l'étendue de cette surface et à la puissance m de la vitesse du vent estimée dans le sens de la normale à cet élément.

Ainsi nous obtenons les courbes que nous avons considérées dans un autre article [*], et qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables.

On peut déduire de là quelques résultats connus. Si l'on fait $m = 0$, la force R est constante, et l'équation (8) est celle d'une chaînette. Si $m = 1$, la force R est en raison directe du sinus de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente de la courbe au point où elle est appliquée; en d'autres termes, les forces qui sollicitent les éléments de la chaîne sont proportionnelles aux projections de ces éléments sur l'axe des y, et dans ce cas, l'équation (8) représente une parabole qui est bien, en effet, la courbe des ponts suspendus, etc.

L'équation (8) se présente sous une forme illusoire quand $m = -1$: pour ce cas, qui est celui où la composante de la force donnée, normale à la courbe d'équilibre de la chaîne, est constante, il faut remonter à l'équation (7); on obtient ainsi

$$\rho \sin \theta = C',$$

où, en substituant à ρ sa valeur en fonction de θ,

$$\frac{dx}{C'} = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta},$$

d'où, intégrant deux fois sans mettre les constantes qu'il est toujours possible de faire disparaître en portant les axes parallèlement à eux-mêmes,

$$e^{\frac{x}{C'}} = \cos\frac{y}{C'};$$

changeant les axes de manière que la partie positive des x et la partie positive des y deviennent respectivement la partie négative des y et la partie positive des x, il viendra

$$e^{\frac{y}{C'}} \cos\frac{x}{C'} = 1.$$

C'est le résultat auquel on arrive quand on cherche l'équation de la chaînette d'égale résistance, ainsi que l'a fait voir Coriolis, à la page 57 du tome Ier de ce Journal.

Si au lieu de supposer la force R simplement proportionnelle à une

[*] Voyez le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome IX, page 97.

puissance de $\sin\theta$, on la suppose proportionnelle à une puissance de $\sin\theta$ et à une puissance de ρ, on trouve encore les courbes (8). En effet, on a alors

$$R = a \sin^m \theta \, \rho^n,$$

et l'équation (6) devient

$$\rho^{n+1} \sin^{m+2} \theta = \frac{C}{a} = C',$$

ou

$$\rho \sin^{\frac{m+2}{n+1}} \theta = C'^{\frac{1}{n+1}} = C'',$$

d'ou, intégrant comme plus haut,

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2(n+1)}{m-n+1}} - 1}}.$$

Supposons encore la force R proportionnelle à une puissance quelconque de $\cos\theta$, de telle sorte que

$$R = a \cos^m \theta.$$

l'équation (6) deviendra

$$\rho \sin^2 \theta \cos^m \theta = \frac{C}{a} = C',$$

d'où l'on tire aisément

$$\frac{dx}{C'} = \frac{d\theta}{\sin^2\theta \cos^{m-1}\theta}.$$

Si en particulier $m = 1$, auquel cas la force R a une intensité qu'il est facile d'interpréter, l'équation précédente donne

$$x \operatorname{tang} \theta = x \frac{dy}{dx} = -C',$$

en ne mettant pas la constante, d'où, intégrant,

$$y = -C' lx,$$

ce qui est assez remarquable.

IV.

Sans nous arrêter à faire un plus grand nombre d'applications du cas où la force R est toujours parallèle à la même direction, cas pour lequel, nous devons le dire, il est presque toujours plus simple d'opérer directement et sans passer par l'équation (5), passons à d'autres hypothèses sur la direction de la force.

Supposons que l'angle θ que fait la force R avec la tangente à la courbe d'équilibre soit constant, l'équation (5) deviendra

$$d.\mathrm{R}\rho + \mathrm{R}\cot\theta\, ds = 0;$$

mais φ étant toujours l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x, on a

$$ds = \pm\, \rho\, d\varphi,$$

le signe étant facile à déterminer; l'équation précédente revient donc à

$$d.\mathrm{R}\rho \pm \mathrm{R}\rho\cot\theta\, d\varphi = 0,$$

d'où, intégrant,

$$\mathrm{R}\rho = \mathrm{C}e^{m\varphi}, \tag{9}$$

en posant, pour simplifier,

$$\mp\cot\theta = m.$$

Faisons maintenant quelques hypothèses sur R. Supposons d'abord R constant; l'équation (9) se réduira alors à

$$\rho = \mathrm{C}'e^{m\varphi}. \tag{10}$$

Toutes les courbes comprises dans cette dernière équation ont leurs développées semblables à elles-mêmes. En effet, de cette équation on tire

$$d\rho = m\mathrm{C}'e^{m\varphi}\, d\varphi = m\rho\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = m\rho.$$

Or $\pm\frac{d\rho}{d\varphi}$ est le rayon de courbure de la développée de la courbe, et

l'équation précédente montre que cette quantité est proportionnelle au rayon de courbure.

On sait que les spirales logarithmiques jouissent de la propriété dont il s'agit ; je dis, de plus, que les spirales logarithmiques sont les seules courbes comprises dans l'équation (10).

En effet, substituant à ρ sa valeur, cette équation donne

$$dx = \pm C' \cos\varphi\, e^{m\varphi}\, d\varphi,$$

et par conséquent

$$dy = \pm C' \sin\varphi\, e^{m\varphi}\, d\varphi;$$

d'ou, intégrant par parties,

$$x = \pm C' \frac{e^{m\varphi}(\sin\varphi + m\cos\varphi)}{1 + m^2},$$

$$y = \pm C' \frac{e^{m\varphi}(m\sin\varphi - \cos\varphi)}{1 + m^2},$$

en laissant de côté les constantes qu'il est toujours possible de faire disparaître.

Pour éliminer φ entre les deux équations précédentes, divisons-les l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\varphi - \cos\varphi}{\sin\varphi + m\cos\varphi} = \frac{m\,\mathrm{tang}\,\varphi - 1}{\mathrm{tang}\,\varphi + m},$$

d'où

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{x + my}{mx - y} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{y}{x}}{1 - \frac{1}{m}\cdot\frac{y}{x}};$$

partant dans la valeur de $x^2 + y^2$, en se rappelant que

$$m = \mp \cot\theta.$$

et en posant

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x} = \omega,$$

on trouve, toutes réductions faites,

$$r = A\, e^{m(\omega \mp \theta)}.$$

On arriverait à une conséquence analogue si l'on posait

$$R = ae^{n\varphi}.$$

On pourrait faire d'autres hypothèses sur R qui conduiraient à des résultats plus ou moins curieux.

V.

Supposons maintenant que la force R passe constamment par un même point que nous supposerons être l'origine des coordonnées, l'angle que fait la force R avec la partie positive de l'axe des x, et que nous avons représenté dans le § Ier par α, sera égal, dans ce cas, à l'azimut du point où la force est appliquée, ou à cet azimut augmenté de 180 degrés. Ainsi, représentant l'azimut d'un point quelconque par ω, nous aurons

$$\alpha = \omega, \quad \text{ou} \quad \alpha = 180^\circ + \omega.$$

d'ou, dans tous les cas,

$$d\alpha = d\omega.$$

Reprenons maintenant l'équation (4), et remplaçons dans cette équation ds par sa valeur $\mp \rho\, d\varphi$, il viendra

$$d(R\rho \sin\theta) \mp R\rho \cos\theta\, d\varphi = 0,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris selon que l'angle φ va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement infiniment petit fait dans le sens des s positifs; mais on a, ainsi qu'on l'a vu dans le § Ier,

$$\sin(\alpha - \varphi) = \pm \sin\theta, \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\theta,$$

d'où

$$d\alpha - d\varphi = d\omega - d\varphi = \pm d\theta,$$

le signe des seconds membres étant déterminé de la même manière; on a donc

$$d(R\rho \sin\theta) + R\rho \cos\theta\, d\theta \mp R\rho \cos\theta\, d\omega = 0,$$

le signe $\mp$ étant toujours déterminé comme il a été dit. De là on déduit

$$\sin\theta\, d.R\rho + 2R\rho \cos\theta\, d\theta \mp R\rho \cos\theta\, d\omega = 0.$$

d'où

$$(11)\qquad \frac{d.\mathrm{R}\rho}{\mathrm{R}\rho} = \frac{-2\cos\theta\, d\theta \pm \cos\theta\, d\omega}{\sin\theta}.$$

Cette équation sera principalement utile pour faire connaître la force, quand la courbe d'équilibre de la chaîne sera donnée. Faisons quelques applications.

Supposons la courbe d'équilibre telle que θ soit constant; et cherchons d'abord l'équation de cette courbe. Pour cela, remarquons qu'ayant

$$\sin(\alpha - \varphi) = \pm \sin\theta, \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\theta,$$

comme il a été dit dans le § Ier, on a aussi

$$\operatorname{tang}(\alpha - \varphi) = \pm \operatorname{tang}\theta,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang}(\omega - \varphi) = \pm \operatorname{tang}\theta,$$

puisque $\alpha = \omega$ ou $= 180^\circ + \omega$. Mais r étant le rayon vecteur correspondant à l'azimut ω, on a

$$\operatorname{tang}(\omega - \varphi) = -\frac{r\,d\omega}{dr};$$

donc

$$\frac{r\,d\omega}{dr} = \mp \operatorname{tang}\theta,$$

le signe étant toujours déterminé de la même manière; de là nous tirons, en intégrant,

$$(12)\qquad r = \mathrm{C}e^{\mp\cot\theta\,\omega}$$

pour l'équation de la courbe cherchée.

Maintenant, θ étant constant, l'équation (11) devient

$$\frac{d\mathrm{R}\rho}{\mathrm{R}\rho} = \pm\cot\theta\, d\omega,$$

d'où, intégrant,

$$\mathrm{R}\rho = \mathrm{C}'e^{\pm\cot\theta\,\omega};$$

d'ailleurs, de l'équation (12) on tire le rayon de courbure

$$\rho = \frac{r}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{C}}{\sin\theta}\, e^{\mp\cot\theta\,\omega};$$

on a donc

$$R = C' \sin\theta\, e^{\pm 2\cot\theta\omega} = \frac{C''}{r^2}$$

pour la force cherchée.

Supposons, en second lieu, la courbe d'équilibre telle que

$$\mp d\theta = m\,d\omega,$$

ou

$$\frac{\pi}{2} \mp \theta = m\omega,$$

en prenant l'axe polaire convenablement, et le signe étant déterminé comme plus haut; l'équation polaire de la courbe considérée sera, en se rappelant que l'on a, en général,

$$r\frac{d\omega}{dr} = \mp \operatorname{tang}\theta,$$

ainsi qu'on l'a déjà fait voir,

$$r\frac{d\omega}{dr} = -\cot m\omega;$$

d'où, intégrant,

$$r^m = a^m \cos m\omega. \tag{13}$$

Maintenant, dans l'hypothèse actuelle, l'équation (11) devient

$$\frac{d.R\rho}{R\rho} = \pm\frac{(2m+1)\cos\theta\, d\omega}{\sin\theta} = \frac{(2m+1)\sin m\omega\, d\omega}{\cos m\omega},$$

d'où, intégrant,

$$R\rho \cos^{\frac{2m+1}{m}} m\omega = C;$$

d'ailleurs, de l'équation (13) on tire le rayon de courbure

$$\rho = \frac{a}{m+1}(\cos m\omega)^{\frac{1}{m}-1};$$

on a donc

$$R = C' \cos^{-\frac{m+2}{m}} m\omega = C'' r^{-(m+2)}$$

pour la force cherchée.

VI.

Nous avons toujours supposé jusqu'ici que la figure d'équilibre de la chaîne était une courbe plane; si, en vertu de la nature de la force R et de la position des points fixes A et B, la figure d'équilibre est une courbe à double courbure, on remarquera que la projection sur un plan quelconque de cette courbe à double courbure peut être considérée comme la figure d'équilibre d'une chaîne dont les éléments sont sollicités par les composantes parallèles au plan de projection des forces qui agissent sur la première chaîne, ainsi qu'on le reconnaît aisément, soit au moyen des trois équations (1), soit en employant immédiatement les théorèmes élémentaires sur la composition des forces. Cela étant, on pourra toujours, en opérant comme au § Ier, mettre l'équation des projections sur les plans coordonnés de la courbe d'équilibre d'une chaîne quelconque, sous la forme de l'équation (4), et conclure ensuite, dans plusieurs cas, soit les projections de la figure d'équilibre de la chaîne, la force étant donnée, soit inversement la force quand on connaîtra les projections de la figure d'équilibre.

VII.

Considérons le mouvement dans l'espace d'un point matériel quelconque; soient x, y, z les coordonnées de ce point au bout du temps t, R l'intensité de la force qui le sollicite, et enfin α, β, γ les angles que la direction de la force R fait avec les parties positives des axes des coordonnées : on aura, comme l'on sait, les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= R\cos\alpha, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= R\cos\beta, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= R\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

Si le mouvement a lieu dans un plan, on pourra prendre les axes des coordonnées dans ce plan, et alors, il suffira de considérer les deux premières des équations (1). C'est ce cas que nous examinerons d'abord.

Appelons v la vitesse du mobile au bout du temps t, θ l'angle que fait avec la direction de la force R la tangente de la trajectoire au point x, y, z, prolongée dans le sens du mouvement, et enfin ρ le rayon de courbure de la trajectoire au même point. On pourra, comme l'on sait, remplacer les équations du mouvement par les suivantes :

$$\frac{v^2}{\rho} = \mathrm{R}\sin\theta, \quad \frac{dv}{dt} = \mathrm{R}\cos\theta.$$

De la première équation nous déduisons

$$d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) = 2v\,dv,$$

les différentielles se rapportant, dans cette dernière équation comme dans l'avant-dernière, à un déplacement infiniment petit effectué dans le sens du mouvement; mais s étant l'arc de la trajectoire compté à partir d'un point fixe dans le même sens, on a

$$v = \frac{ds}{dt};$$

l'équation précédente revient donc à

$$d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) - 2\frac{dv}{dt}\,ds = 0,$$

ou, d'après une de celles écrites plus haut,

$$(15) \qquad d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) - 2\mathrm{R}\cos\theta\,ds = 0,$$

équation qui représente la trajectoire du mobile.

Si nous comparons l'équation (15) à l'équation (4), nous remarquons une certaine analogie: les premiers termes sont les mêmes dans les deux équations, et le second terme, dans la première équation, est égal au double changé de signe du second terme dans la seconde. Nous déduisons de là une conséquence remarquable : concevons qu'ayant décomposé la force R en une force normale et une force tangentielle, on prenne chacune de ces composantes en sens inverse, en réduisant à moitié la composante normale; appelons R′ la résultante de ces deux nouvelles forces, et θ' l'angle que fait la force R′ avec la tangente à la trajectoire prolongée dans le sens du mouvement, nous aurons

$$\mathrm{R}\sin\theta = 2\mathrm{R}'\sin\theta', \quad \mathrm{R}'\cos\theta' = -\mathrm{R}\cos\theta,$$

d'où, substituant dans l'équation (15),

$$d(R'\rho \sin \theta') + R' \cos \theta' ds = 0.$$

Cette équation coïncide avec l'équation (4); nous pouvons donc dire : « La trajectoire que décrit un mobile sous l'action de la force R, » est la courbe d'équilibre d'une chaîne dont chaque élément est sol- » licité par une force qui se déduit de R en prenant en sens inverse » les composantes normale et tangentielle de cette force et réduisant » à moitié la composante normale. » Il est bien entendu que la chaîne doit, en outre, être assujettie à passer par deux points de la trajectoire et à avoir pour longueur entre ces deux points la longueur de l'arc de la courbe compris entre les mêmes points.

Après avoir pris en sens inverse les composantes normale et tangentielle de la force P, on pourrait, au lieu de réduire à moitié la composante normale, doubler la composante tangentielle, et l'on arriverait encore à la même conséquence.

On peut présenter le résultat précédent sous une forme inverse et dire : « Si une courbe plane quelconque est la figure d'équilibre d'une » chaîne dont chaque élément est soumis à l'action de la force R, la » même courbe sera la trajectoire d'un mobile sollicité par une force » que l'on déduit de R en prenant en sens inverse ses composantes » normale et tangentielle à la courbe et doublant la composante nor- » male ou réduisant à moitié la composante tangentielle. » Il est encore bien entendu ici que les circonstances initiales du mouvement du mobile doivent être convenablement choisies : ainsi, il faut, comme on le reconnaît aisément, que le point de départ du mobile soit à l'extrémité de la chaîne, que sa vitesse initiale soit dirigée suivant la tangente de la chaîne à cette extrémité, et enfin que le carré de sa vitesse initiale, divisé par la composante normale de la force qui le sollicite à l'origine du mouvement, soit égal au rayon de courbure de la chaîne à la même extrémité.

VIII.

La remarque que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, établissant une certaine relation entre l'équilibre et le mouvement,

pourra être utile dans plusieurs circonstances. On peut s'en servir, par exemple, pour démontrer d'une manière très-simple le théorème que nous avons fait connaître à la page 113 de ce volume, et qui s'énonce ainsi :

« Si un mobile successivement soumis à l'action des forces F, F′, F″,... » et partant toujours du point A avec des vitesses v_0, v'_0, v''_0,... de » même direction, mais d'intensités différentes, décrit la même courbe » AMB, le même mobile partant du point A avec la vitesse V_0 et soumis » à l'action de la résultante des forces F, F′, F″,... décrira encore la » courbe AMB, pourvu que la vitesse V_0 ait la même direction que les » vitesses v_0, v'_0,... et que son intensité soit telle que

$$V_0^2 = v_0^2 + v'^2_0 + v''^2_0 + \ldots \text{ »}$$

En effet, soient T et N les composantes tangente et normale à la courbe AMB de la force F; T′ et N′ les composantes analogues de la force F′, et ainsi de suite. Si aux différents points d'une chaîne on applique, dans des sens respectivement opposés à ceux des composantes de la force F, une force T et une force $\frac{N}{2}$, cette chaîne aura pour figure d'équilibre la courbe AMB; il en sera de même si l'on applique à chaque élément de la chaîne la force T′ et la force $\frac{N'}{2}$ dans des sens respectivement opposés à ceux des composantes de la force F′, et ainsi de suite; donc il en sera de même aussi si l'on applique à chaque élément de la chaîne la résultante des forces T, T′, T″,... et la résultante des forces $\frac{N}{2}$, $\frac{N'}{2}$, $\frac{N''}{2}$,... prises comme il a été dit; de là résulte que si l'on soumet un mobile à l'action de la résultante des composantes tangentes T, T′, T″,... et de la résultante des composantes normales N, N′, N″,... des forces F, F′, F″,...; ou, ce qui revient au même, à l'action de la résultante des forces F, F′, F″,..., ce mobile décrira la courbe AMB, pourvu toutefois que son point de départ soit en A, que sa vitesse initiale V_0 soit dirigée suivant la tangente en A à la courbe AMB, ou, en d'autres termes, comme le sont les vitesses v_0, v'_0, v''_0,..., et enfin que le carré de la vitesse V_0 soit égal à la somme des composantes normales N, N′, N″,... multipliée par le rayon de courbure de AMB au point A, ou, ce qui revient au même, à la somme des carrés des vitesses v_0, v'_0, v''_0,...

On peut rendre la démonstration précédente indépendante de la remarque du § VII. En effet, conservant nos notations, nous voyons qu'en vertu de l'hypothèse, les équations

$$d(\mathrm{N}\rho) - 2\mathrm{T}\,ds = 0, \quad d(\mathrm{N}'\rho) - 2\mathrm{T}'\,ds = 0, \quad d(\mathrm{N}''\rho) - 2\mathrm{T}''\,ds = 0, \ldots,$$

sont toutes vérifiées pour la courbe AMB; il en est donc de même de leur somme, c'est-à-dire de

$$d.[(\mathrm{N} + \mathrm{N}' + \mathrm{N}'' + \ldots)\rho] - 2(\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \ldots)\,ds = 0.$$

Mais cette dernière équation comprend celle de la trajectoire du mobile dans le mouvement composé; donc si AMB satisfait, en outre, aux circonstances initiales du mouvement qui déterminent les constantes, cette courbe sera la trajectoire dont il s'agit. Or, comme on l'a vu dans la démonstration précédente, les conditions initiales se trouvent remplies si les relations entre les vitesses initiales qu'exige l'énoncé le sont elles-mêmes.

Les deux démonstrations que nous venons de donner supposent que la trajectoire soit plane; mais on passe aisément de ce cas au cas général, ainsi qu'on le verra plus bas.

IX.

L'équation (15) peut servir à déterminer assez simplement, dans bien des cas, la trajectoire décrite par un mobile, connaissant la force qui le sollicite; ou, inversement, à déterminer cette force, la trajectoire étant connue. Faisons quelques applications.

Supposons la force R qui sollicite le mobile toujours parallèle à la même direction, à l'axe des x par exemple; nous aurons alors

$$ds = -\rho\,d\theta,$$

ainsi qu'on le voit aisément en examinant tous les cas qui peuvent se présenter, et l'équation (15) deviendra

$$d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) + 2\mathrm{R}\rho\cos\theta\,d\theta = 0,$$

ou

$$\sin\theta\,d.\mathrm{R}\rho = -3\mathrm{R}\rho\cos\theta\,d\theta;$$

d'où, intégrant,

$$R\rho \sin^3 \theta = C.$$

Soit maintenant

$$R = a \sin^m \theta,$$

il viendra

$$\rho \sin^{m+3} \theta = \frac{C}{a} = C',$$

d'où, intégrant, comme au § III,

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{m+2}} - 1}}.$$

Si l'on suppose $m = 0$, c'est-à-dire la force R constante, l'équation précédente devient celle d'une parabole, ce qui doit être. Si $m = -1$, c'est-à-dire si la composante normale de la force R est constante, l'équation représente une chaînette, etc. Pour $m = -2$, l'équation précédente se présente sous une forme illusoire; mais pour ce cas, comme on l'a vu au § III, on doit prendre l'équation

$$e^{\frac{x}{C'}} = \cos \frac{y}{C'}.$$

On pourrait supposer la force R proportionnelle à une puissance de ρ et à une puissance de $\sin \theta$ ou à une puissance de $\cos \theta$; on trouverait, pour tous ces cas des résultats analogues à ceux du § III.

Admettons, en second lieu, que la force R fasse toujours le même angle avec la tangente à la trajectoire, θ sera alors constant, et l'équation (15) deviendra

$$d.R\rho = 2R \cot \theta \, ds,$$

ou, en remarquant que

$$ds = \pm \rho \, d\varphi,$$

φ représentant, comme plus haut, l'angle que fait avec la partie positive de l'axe des x la tangente à la trajectoire,

$$d.R\rho = \pm 2R\rho \cot \theta \, d\varphi,$$

d'où, intégrant,

$$R\rho = Ce^{\pm 2\rho \cot \theta}.$$

Si P est constant, on trouvera une spirale logarithmique, comme au § III; il en sera de même si l'on pose

$$R = Ce^{n\rho}, \text{ etc.}$$

On peut enfin supposer que R soit une force centrale; alors l'équation (15) est principalement utile pour faire connaître la force, la trajectoire étant donnée; mais l'équation que l'on obtient est beaucoup moins commode que celle qu'on possède pour le même objet. Du reste, cette équation conduit à des résultats analogues à ceux du § V; ainsi elle montre que les courbes

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

sont décrites par des forces centrales proportionnelles à la puissance $-(2m+3)$ de la distance, etc.

X.

Nous avons supposé jusqu'ici que la trajectoire décrite par le mobile était plane; si cette trajectoire est à double courbure, on remarquera que, ainsi que cela résulte des équations (14) du mouvement d'un point quelconque, la trajectoire à double courbure décrite par un mobile sous l'action d'une force R, a toujours pour projection sur chacun des plans coordonnés, la trajectoire que décrit un mobile soumis à l'action de la composante de R parallèle à ce plan; bien entendu que si la coordonnée perpendiculaire au plan de projection entre dans l'expression de cette composante, on la remplace par sa valeur en fonction de l'une des deux autres coordonnées, valeur qui doit dès lors être connue. Cela étant, on pourra mettre sous la forme (15) les équations des projections de la trajectoire, et employer ensuite, comme on l'a vu, ces équations pour déterminer la trajectoire connaissant la force, ou surtout, réciproquement, pour trouver la force quand on connaîtra la trajectoire. On voit aussi, d'après la même remarque, comment on pourra étendre le théorème démontré au § VIII, au cas où la trajectoire sera à double courbure. En effet, si les forces F, F′, F″,... agis-

sant séparément font décrire à un mobile la même courbe à double courbure AMB, les composantes de ces forces parallèles à un quelconque des plans coordonnés et exprimées en fonction des coordonnées relatives à ce plan, agissant séparément, feront aussi décrire la même courbe plane A′M′B′ projection de AMB sur le plan considéré; donc la relation hypothétique entre les vitesses initiales étant satisfaite, la résultante des composantes des forces F, F′,... exprimées en fonction de deux coordonnées, fera aussi décrire la courbe plane A′M′B′; cela ayant lieu pour les trois plans des coordonnées, on voit, par un raisonnement assez simple, que la courbe à double courbure AMB sera décrite par le mobile sous l'action de la résultante des forces F, F′, F″,....

ADDITION.

J'ai fait voir, à la fin du § III de la Note précédente, que la figure d'équilibre de la chaînette d'égale résistance n'est autre chose que la courbe qu'affecte, dans l'état d'équilibre, une chaîne dont les divers éléments sont sollicités par des forces de direction constante et d'une intensité telle que la composante normale à la chaîne soit constante. Ce résultat est susceptible d'une extension assez remarquable : « La » figure d'équilibre d'une chaîne d'égale résistance, et dont les élé- » ments sont soumis à l'action d'une force centrale proportionnelle » à la distance, n'est autre chose que la courbe qu'affecte, dans l'état » d'équilibre, une chaîne dont les divers éléments sont sollicités par » une force centrale d'une intensité telle que la composante normale » à la chaîne soit constante. »

En effet, adoptant les notions ordinaires et prenant pour origine le centre des forces agissant sur les éléments de la chaîne, on trouve aisément pour les équations de la dernière courbe

$$T\frac{r^2 d\theta}{ds} = C, \quad dT + R\,dr = 0,$$

avec la condition

$$\frac{R\,r\,d\theta}{ds} = a;$$

éliminant R et T entre ces trois équations, il vient

$$d.\frac{ds}{r^2 d\theta} + \frac{a}{C}\frac{ds}{d\theta}\frac{dr}{r} = 0,$$

d'où, développant en prenant θ pour variable indépendante,

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} - 2\frac{ds}{d\theta}\frac{dr}{r d\theta} + \frac{a}{C}\frac{ds}{d\theta}\frac{r dr}{d\theta} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{d^2 s}{d\theta^2}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{2 dr}{r d\theta} - \frac{a}{C}\frac{r dr}{d\theta},$$

et, intégrant,

$$\frac{ds}{r^2 d\theta} = C' e^{-\frac{a}{2C} r^2},$$

d'où, enfin,

$$\theta + \alpha = \int \frac{dr}{r\sqrt{C'^2 r^2 e^{-\frac{a}{C} r^2} - 1}}.$$

Il est facile de voir maintenant que cette équation coïncide avec celle que l'on obtient en posant $R = r$ dans l'équation (3) de la page 98 de ce volume : or cette dernière équation représente la courbe d'équilibre d'une chaîne d'égale résistance soumise à l'action de la force centrale R ; cela prouve ce que nous avions avancé.

NOTE

SUR LA THÉORIE DE L'ATTRACTION;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

C'est un théorème connu que, si s est une surface quelconque renfermant dans son intérieur une masse m de matière, attirante suivant le carré inverse de la distance, il y a une distribution déterminée d'une quantité de matière égale à m, sur la surface s, telle qu'elle exercera sur les points en dehors de s la même attraction que m.

Si s est une des *surfaces d'équilibre* relatives à m, ou une surface en dehors de m à laquelle l'attraction de m soit partout perpendiculaire, la distribution de matière sur s qui exerce sur les points extérieurs la même attraction que m, est connue.

En effet, soit R l'attraction de m sur une unité de matière en un point P de la surface s. La quantité de matière qui correspond à l'élément ds de la surface, situé en P, est

$$\frac{1}{4\pi} \mathrm{R}\, ds,$$

comme on le prouve facilement.

Je me propose ici de montrer que la distribution de matière sur s, qui exerce la même attraction que m sur les points extérieurs, peut être déterminée dans une classe beaucoup plus générale de cas, que celui où s est une surface d'équilibre.

En effet, soient m_1 une masse posée arbitrairement à côté de m, U le *potentiel* (suivant la définition de M. Gauss) des deux masses en un point quelconque P. Soit s une surface fermée, renfermant dans son intérieur toute la masse m, mais aucune partie de la masse m_1, et telle que U ait une valeur constante (U) dans toute son étendue. Cela étant,

je vais démontrer que, si de la matière est distribuée sur s, de telle manière que la quantité sur un élément ds, situé en P, soit

$$\frac{1}{4\pi} R ds,$$

R représentant l'attraction de m et m_1 sur une unité de matière en P, l'attraction de la matière ainsi répartie sera, quant aux points extérieurs, la même que celle de m, et quant aux points intérieurs, la même que celle de m_1, mais dirigée en sens contraire.

On doit remarquer que l'ensemble de s, et d'une autre surface fermée s_1, renfermant dans son intérieur m_1, sera la surface complète d'équilibre relative aux masses m et m_1, et que si de la matière est distribuée sur s_1 suivant la même loi que celle de la distribution de la matière sur s, l'attraction totale des deux surfaces sera zéro sur les points intérieurs, et la même que celle de m et m_1 sur les points extérieurs.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point attiré P, et soient v et v_1 les potentiels de m et m_1 en P, de sorte que

$$(1) \qquad U = v + v_1.$$

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque P′ sur la surface s, et R′, U′, v', v'_1, les valeurs de R, U, v, v_1 en ce point. Soient de plus ds' un élément de la surface s, situé en P′, et Δ la distance de P′ à P, en sorte que

$$(2) \qquad \Delta = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

En désignant par u le potentiel en P, de la matière distribuée sur s, ou de la *surface matérielle* s, on aura

$$(3) \qquad u = \frac{1}{4\pi} \int \frac{R\, ds}{\Delta}.$$

Or, X′, Y′, Z′ étant les composantes de R′, parallèles aux trois axes des x, y, z, et α', β', γ' les angles que fait avec ces axes la direction de R′, ou une normale à la surface s en P′, on aura

$$R' = X' \cos\alpha' + Y' \cos\beta' + Z' \cos\gamma'.$$

De plus, puisque R′ est l'attraction de m et m_1 en P′,

$$-X' = \frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}, \qquad -Y' = \frac{dv'}{dy'} + \frac{dv'_1}{dy'}, \qquad -Z' = \frac{dv'}{dz'} + \frac{dv'_1}{dz'};$$

d'où l'équation (3) devient

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{ds'}{\Delta}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right)\cos\alpha' + \left(\frac{dv'}{dy'} + \frac{dv'_1}{dy'}\right)\cos\beta' \\ \qquad\qquad + \left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dv'_1}{dz'}\right)\cos\gamma'\end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{\Delta}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right)dy'\,dz' + \left(\frac{dv'}{dy'} + \frac{dv'_1}{dy'}\right)dz'\,dx' \\ \qquad\qquad + \left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dv'_1}{dz'_1}\right)dx'\,dy'\end{array}\right].$$

Dans ces intégrations, il faut choisir les limites de manière à comprendre tous les points de la surface s.

Or, on a

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right) = \int dx'\left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{d^2v'}{dx'^2} + \frac{d^2v'_1}{dx'^2}\right) + \frac{d}{dx'}\,\frac{1}{\Delta}\cdot\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right)\right],$$

et des transformations semblables s'appliquent aux autres termes de l'expression de u. Par conséquent,

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int dx'dy'dz'\left[\begin{array}{c}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{d^2v'}{dx'^2} + \frac{d^2v'}{dy'^2} + \frac{d^2v'}{dz'^2} + \frac{d^2v'_1}{dx'^2} + \frac{d^2v'_1}{dy'^2} + \frac{d^2v'_1}{dz'^2}\right) \\ + \frac{d}{dx'}\,\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dx'}(v' + v'_1) + \frac{d}{dy'}\,\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dy'}(v' + v'_1) + \frac{d}{dz'}\,\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dz'}(v' + v'_1)\end{array}\right],$$

où les intégrales comprennent tout l'espace intérieur à la surface s.

Or, pour tous les points dans cet espace, on a

$$\frac{d^2v'_1}{dx'^2} + \frac{d^2v'_1}{dy'^2} + \frac{d^2v'_1}{dz'^2} = 0,$$

$$\frac{d^2v'}{dx'^2} + \frac{d^2v'}{dy'^2} + \frac{d^2v'}{dz'^2} = -4\pi\rho',$$

ρ' étant la densité de la matière de m au point (x', y', z'), quantité qu'il faut prendre égale à zéro, quand (x', y', z') n'est pas un point de m.

Maintenant, v étant le potentiel de m en P, on a

$$\int\int\int \rho' \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\Delta} = \mathrm{U}.$$

Par conséquent l'expression de u devient

$$u = \mathrm{U} - \frac{1}{4\pi}\int\int\int dx'\,dy'\,dz' \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dx'}(v'+v'_1) \\ +\frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dy'}(v'+v'_1)+\frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dz'}(v'+v'_1) \end{array}\right] = \mathrm{U} - h,$$

en représentant, pour abréger, l'intégrale triple par h. Si l'on integre chaque terme de cette intégrale par parties, il vient

$$h = \frac{1}{4\pi}\int\int (v'+v'_1)\left(\frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}.dy'dz' + \frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}.dz'dx' + \frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}.dx'dy'\right)$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int\int\int dx'\,dy'\,dz'\,(v'+v'_1)\left(\frac{d^2}{dx'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dy'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dz'^2}\frac{1}{\Delta}\right).$$

où les intégrales doubles comprennent toute la surface s, et les intégrales triples tout l'espace intérieur, comme auparavant. Mais $v + v'_1$ a une valeur constante (U) pour toute la surface s. Par conséquent, le premier terme de h prend la forme

$$\frac{1}{4\pi}(\mathrm{U})\int\int\left(\frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}.dy'dz' + \frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}.dz'dx' + \frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}.dx'dy'\right),$$

ce qui, comme on le démontre facilement, a la valeur

$$0 \quad \text{ou} \quad -(\mathrm{U}),$$

selon que P est en dehors ou en dedans de s.

De plus l'on a

$$\frac{d^2}{dx'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dy'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dz'^2}\frac{1}{\Delta} = 0,$$

quand la distance PP′ n'est pas infiniment petite. Par conséquent, quand P est en dehors de s, le second terme de h disparaît. Si P est en dedans de s, tous les éléments de l'intégrale, pour lesquels PP′ n'est pas infiniment petit, s'évanouissent; donc l'intégrale a la même valeur que si $v' + v'_1$ avait partout la valeur $v + v_1$, qui correspond

au point P. Ainsi le second terme de h est égal à

$$-\frac{v+v_1}{4\pi}\int\int\int dx'\,dy'\,dz'\left(\frac{d^2}{dx'^2}\frac{1}{\Delta}+\frac{d^2}{dy'^2}\frac{1}{\Delta}+\frac{d^2}{dz'^2}\frac{1}{\Delta}\right),$$

ou à

$$-\frac{v+v_1}{4\pi}\int\int\left(\frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}.dy'\,dz'+\frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}.dz'\,dx'+\frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}.dx'\,dy'\right),$$

ce qui, comme ci-dessus, est égal à

$$v+v_1,$$

puisque, dans le cas que nous considérons, P est en dedans de s.

Ainsi on trouve

$$h=0,\quad \text{quand P est extérieur,}$$
$$h=-(\mathrm{U})+v+v_1,\quad \text{quand P est intérieur;}$$

d'où

$$u=v,\quad \text{dans le premier cas,}$$
$$u=(\mathrm{U})-v_1,\quad \text{dans le second cas.}$$

Par conséquent, v, v_1 et u étant les valeurs en P des potentiels de m, m_1 et s, il suit que quand P est en dehors de s, l'attraction de s sur P est égale à celle de m, et quand P est en dedans de s, l'attraction de s sur ce point est égale à celle de m_1, mais dirigée en sens contraire, ce qu'il s'agissait de prouver.

On aurait pu prévoir cette conclusion en se rappelant les trois théorèmes suivants :

1°. Si une quantité de matière égale à $m+m_1$ est distribuée sur s et s_1, de telle manière que la *densité* de la distribution aux divers points de ces surfaces soit proportionnelle à l'attraction de m et m_1 dans ces points, l'attraction de s et s_1 sera zéro sur les points intérieurs, et égale à celle de m et m_1 sur les points extérieurs.

2°. Il n'y a qu'une seule distribution de la même quantité de matière, sur s et s_1, qui n'exerce aucune attraction sur les points intérieurs.

3°. Il est possible de trouver une distribution d'une quantité de matière égale à m, sur s, telle qu'elle exerce sur les points en dehors de s

la même attraction que m, et une distribution d'une quantité de matière égale à m_1, sur s_1, qui exerce sur les points en dehors de cette surface la même attraction que m_1.

Ces théorèmes ont été démontrés pour la première fois par M. Gauss; mais il n'a démontré le second que dans le cas où la surface considérée est une seule surface fermée. L'extension de ce théorème au cas d'un nombre quelconque de surfaces disjointes est due à M. Liouville.

Ces théorèmes suffisent pour en conclure le théorème qui forme l'objet de cette Note, mais j'ai préféré la démonstration directe donnée ci-dessus.

(Glascow, 15 décembre 1843.)

RECHERCHES

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES COMPLEXES;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 27 mai 1841.)

(Extrait des Mémoires de l'Académie de Berlin. — Traduction de M. FAYE.)

Ce Mémoire n'est qu'une partie d'un travail considérable dans lequel je me propose d'étendre aux nombres complexes la plupart des solutions que j'ai déjà trouvées pour des questions relatives à la théorie des nombres entiers réels, en continuant à employer la méthode qui m'a servi dans les occasions que je viens de rappeler. J'ai été déterminé à donner cette extension à mon premier travail non-seulement à cause des nouveaux résultats qu'on en peut attendre, mais aussi, plutôt même, par le désir de soumettre ainsi à une épreuve mes nouvelles méthodes et d'examiner si leur succès doit être attribué à leur harmonie réelle avec la véritable nature des questions résolues, ou bien à ces circonstances favorables qui se présentent parfois dans les recherches mathématiques. C'est une épreuve que notre méthode a très-bien supportée; car pour l'adapter aux questions analogues de la théorie des nombres complexes, il a suffi de quelques modifications qui se déduisaient d'ailleurs naturellement du changement dans l'essence du sujet auquel elle était appliquée.

La majeure partie des nouvelles recherches dont je viens d'indiquer l'origine a pour objet la doctrine des formes quadratiques et paraîtra bientôt ailleurs. Je m'occuperai exclusivement, dans le présent Mémoire, de démontrer le théorème dont voici l'énoncé : « L'expression $kt + l$, » dans laquelle t désigne un nombre entier complexe indéterminé, et » où k, l représentent de semblables nombres donnés sans facteurs

» communs, contient toujours une infinité de nombres premiers. » Cette démonstration ressort, comme celle de la loi analogue pour les nombres réels, du théorème fondamental sur certaines propriétés de la forme quadratique des nombres complexes; aussi me bornerai-je, pour éviter les répétitions inutiles, à renvoyer le lecteur aux recherches déjà mentionnées [*].

§ Ier.

Nous avons déjà supposé que le lecteur connaît les propriétés élémentaires des nombres complexes; cependant il sera utile d'exposer ici brièvement quelques-unes de ces propriétés qui sont d'une importance particulière pour l'intelligence de ce qui va suivre.

Nous poserons, comme à l'ordinaire, $\sqrt{-1} = i$, et nous appellerons nombre entier complexe toute expression telle que $f + gi$, dans laquelle f et g représentent des nombres réels entiers. Le nombre positif $f^2 + g^2$, qui répond au nombre complexe $f + gi$, sera nommé la norme de celui-ci et sera désigné par $N(f + gi)$. Quatre nombres complexes tels que

$$f + gi, \quad -g + fi, \quad -f - gi, \quad g - fi,$$

qui dépendent les uns des autres, de telle sorte que trois quelconques d'entre eux se déduisent du quatrième en le multipliant par -1, $\pm i$, seront nommés corrélatifs.

On peut toujours former, relativement à un module complexe donné m, une série de nombres qui possède cette double propriété: qu'il se trouve toujours parmi ses termes un nombre congru à un nombre

[*] Depuis que le present Mémoire a été soumis à l'Académie, ces recherches ont été publiées dans le XXIVe volume du Journal de M. Crelle, sous le titre de : « Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. » Ce Mémoire contient, outre l'objet indiqué par son titre, une brève exposition des éléments de la théorie des nombres complexes que j'ai limitée aux propositions nécessaires à l'intelligence de ce Traité. On trouvera une exposition plus complète de ces éléments dans le second Mémoire de M. Gauss sur les résidus biquadratiques; c'est dans cet ouvrage que ce grand géomètre a introduit pour la première fois dans la science la notion des nombres complexes; j'y renvoie le lecteur.

quelconque pour le module m, mais qu'il ne s'en trouve qu'un seul. Le nombre des termes ainsi incongrus entre eux est $N(m)$.

On peut déterminer en général le nombre des termes d'un pareil système qui n'ont point de facteur commun avec m. Soit

$$(1) \qquad m = i^{\mu} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

où a, b, c,... représentent des nombres premiers dont aucun n'est égal ni corrélatif aux autres; et soient, en outre,

$$N(a) = A, \quad N(b) = B, \quad N(c) = C, \ldots;$$

alors le nombre cherché sera donné par l'équation

$$\psi(m) = (A - 1) A^{\alpha - 1}.(B - 1) B^{\beta - 1}.(C - 1) C^{\gamma - 1} \ldots.$$

Soient

$$(2) \qquad \mu, \ \mu', \ \mu'', \ldots$$

les termes dont le nombre est ainsi déterminé, et soit l un nombre qui n'ait aucun facteur commun avec m; on prouve facilement que les nombres

$$l\mu, \ l\mu', \ l\mu'', \ldots,$$

quand on les considère abstraction faite de leur ordre, sont congrus d'après le module m avec les nombres (2), et on en conclut aussitôt, comme dans la démonstration connue du théorème de Fermat pour les nombres réels, que l'on a toujours

$$(3) \qquad l^{\psi m} \equiv 1 \ (\text{mod. } m).$$

Dans la théorie ordinaire des nombres on est obligé de considérer les nombres positifs comme primitifs, et les nombres négatifs comme dérivés des premiers en les multipliant par le facteur -1. De même, on simplifierait certaines considérations analogues sur les nombres complexes en choisissant, d'après un principe fixe, un des quatre nombres corrélatifs comme primitif ou *primaire*, dont les autres seraient les produits par -1, $\pm i$. La nécessité d'une telle distinction est surtout sensible quand il s'agit de nombres impairs, et, pour le choix à faire, on

peut se guider sur cette remarque que le produit de deux facteurs positifs devant être aussi positif, de même le produit de deux facteurs primaires devra être également un nombre primaire. Comme on le voit facilement, dans chaque groupe de nombres impairs corrélatifs il y en a toujours un, mais un seul, pour lequel f et g ont respectivement la forme $4\mu + 1$ et 2μ, de même qu'il y en a un seul pour lequel $f - 1$ et g sont contenus tous deux soit dans la forme 4μ, soit dans la forme $4\mu + 2$, et l'on peut facilement se convaincre que la condition énoncée ci-dessus est satisfaite quel que soit celui de ces nombres que l'on choisisse comme primaire, dans tous les groupes de nombres corrélatifs. Nous avons adopté la première définition dans le Mémoire cité plus haut, mais tout ce que nous avons dit reste encore vrai quand on choisit la deuxième. Or, comme la dernière définition est beaucoup plus convenable pour notre but actuel, nous considérerons désormais, dans ce Mémoire, comme primaire celui des quatre nombres impairs corrélatifs pour lequel $f - 1$ et g ont à la fois la forme 4μ, ou bien la forme $4\mu + 2$, en remarquant, toutefois, dans le seul but de faciliter l'emploi de cette définition, qu'elle se réduit évidemment à désigner comme primaire, dans chaque groupe de nombres impairs, celui qui est congru à l'unité positive d'après le module $2 + 2i$.

Dans cette hypothèse, on a, pour chaque nombre impair primaire m,

$$m = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots, \tag{4}$$

où $a, b, c, \ldots$ désignent des nombres premiers primaires différents qui sont complétement déterminés par m, ainsi que leurs exposants.

§ II.

Avant de nous occuper de la question qui fait l'objet spécial de ce Mémoire, il faut que nous exposions quelques propriétés des résidus de diverses puissances pour les modules complexes.

Soient k et l deux nombres complexes sans facteur commun, et soit e le plus petit des exposants différents de zéro, pour lequel $l^e \equiv 1 \pmod{k}$; on dit alors que, pour le module k, l appartient à l'exposant e. Il est alors facile de se convaincre que

$$1,\ l,\ l^2, \ldots,\ l^{e-1},$$

sont incongrues d'après le module k; on voit aussi que si l'on prolonge la série, les mêmes résidus se reproduisent périodiquement, de telle sorte que les seules puissances qui soient congrues à l'unité sont celles dont les exposants sont des multiples de e. Puisque $l^{\psi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, e sera toujours un diviseur de $\psi(k)$. Dans le cas spécial où $\psi(k) = e$, les puissances

$$1,\ l,\ l^2, \ldots,\ l^{\psi(k)-1}$$

forment un système pareil à celui que nous avons considéré dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire que ce système contient un terme, mais un seul, qui est congru d'après le module k, à un nombre arbitraire qui n'aurait aucun facteur commun avec k; et alors l est dit racine primitive de k. Si l'on connaît l'exposant e auquel l appartient, on pourra déterminer ensuite facilement l'exposant auquel appartient une puissance quelconque de l telle que l^s. On voit facilement que ce dernier exposant est $\frac{e}{\delta}$, où δ désigne le plus grand diviseur commun (positif) de s et de e.

1. Nous commencerons par le cas où le module est une puissance $(a+bi)^f$ d'un nombre premier impair à deux termes $a+bi$, de sorte que $N(a+bi) = a^2+b^2 = p$ est un nombre premier réel $4\mu+1$. Il est facile, dans ce cas, de prouver l'existence d'une racine primitive. Si le nombre réel $\mathfrak{a}$ est une racine primitive pour le module p^f, il le sera aussi relativement au module $(a+bi)^f$. Or, dans la supposition que nous venons de faire,

$$1,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}^2, \ldots,\ \mathfrak{a}^{(p-1)p^{f-1}-1}$$

sont incongrus d'après le module p^f; ils auront donc la même propriété pour le module $(a+bi)^f$, et, d'un autre côté, on a

$$\psi[(a+bi)^f] = (p-1)p^{f-1}.$$

Lorsqu'on a choisi une telle racine primitive $\mathfrak{a}$, alors l'exposant $\alpha_n < (p-1)p^{f-1}$, pour lequel

$$\mathfrak{a}^{\alpha_n} \equiv n \,[\text{mod. } (a+bi)^f],$$

se nommera l'indice du nombre arbitraire n non divisible par $a+bi$. Il suit immédiatement de cette définition, qu'on obtient l'indice d'un produit quand on retranche de la somme des indices des facteurs le plus grand multiple de $(p-1)p^{f-1}$ qui y soit contenu.

Le nombre a est toujours non-résidu quadratique de $a+bi$, puisque autrement chaque n devrait être résidu quadratique de $a+bi$. Il suit de là que α_n sera pair ou impair suivant que n sera résidu ou non-résidu quadratique de $a+bi$. On a ainsi, en employant le symbole introduit dans le Mémoire cité,

$$(5) \qquad \left[\frac{n}{a+bi}\right] = (-1)^{\alpha_n}.$$

2. Le cas que nous allons maintenant traiter est celui d'un module de la forme r^g, où r désigne un nombre premier à un seul terme. Comme nous pouvons supposer que r est réel et positif, r est alors un nombre premier de la forme $4\mu+3$. Cette recherche exige la congruence suivante.

$$(b+zr)^{er^{g-2}} \equiv b^{er^{g-2}} + ezb^{er^{g-2}-1}r^{g-1} \pmod{r^g},$$

qui a déjà été employée dans les *Disquisitiones Arithmeticæ*, art. 86. On y suppose, à la vérité, que b et z sont réels; mais la même démonstration est aussi applicable au cas où b et z sont des nombres complexes. Les nombres e et $g \geqq 2$ qui s'y trouvent en exposants sont naturellement positifs.

Il n'y a point de racine primitive pour le module r^g, excepté quand $g=1$, car on peut aisément déduire de la congruence précédente que le plus fort exposant auquel, pour ce module, un nombre puisse appartenir, est $(r^2-1)r^{g-1}$, tandis que $\psi(r^g) = (r^2-1)r^{2g-2}$. Mais on peut montrer, de la manière suivante, qu'il y a des nombres appartenant à l'exposant $(r^2-1)r^{g-1}$. L'assertion relative au cas où $g=1$ a déjà été prouvée (*Theor. res. biq.*, auct. C.-F. Gauss, art. 53). Soit b un nombre appartenant pour le module r à l'exposant r^2-1, c'est-à-dire une racine primitive de r. Dans cette supposition, $(b+zr)^e - 1$ ne sera divisible par r que si e est un multiple de r^2-1. Il suit de là que l'exposant auquel $b+zr$ appartient pour le module r^g doit être divi-

sible par $r^2 - 1$. Mais comme on a, d'autre part,

$$(b + zr)^{(r^2-1)r^{g-1}} \equiv 1 \pmod{r^g},$$

ce qui résulte de la congruence rapportée ci-dessus, quand on pose

$$(b + zr)^{r^2-1} = 1 + ur,$$

on voit que l'exposant en question doit être un diviseur de $(r^2 - 1)r^{g-1}$. D'après cela, on pourra trouver un nombre $b + zr$ appartenant à l'exposant $(r^2 - 1)r^{g-1}$ si l'on peut choisir z de telle sorte que la relation

$$(b + zr)^{(r^2-1)r^{g-2}} \equiv 1 \pmod{r^g}$$

ne soit point satisfaite.

Or on a, d'après le lemme précédent,

$$-1 + (b + zr)^{(r^2-1)r^{g-2}}$$
$$\equiv -1 + b^{(r^2-1)r^{g-2}} + (r^2 - 1)zb^{(r^2-1)r^{g-2}-1}r^{g-1} \pmod{r^g}.$$

Si maintenant on considère que

$$-1 + b^{(r^2-1)r^{g-2}} = \mathrm{B}r^{g-1},$$

où B est un nombre entier, et si l'on pose, pour abréger,

$$(r^2 - 1)b^{(r^2-1)r^{g-2}-1} = \mathrm{C},$$

il est évident que la condition exigée sera remplie quand on aura choisi z de telle sorte que la congruence

$$\mathrm{C}z + \mathrm{B} \equiv 0 \pmod{r}$$

n'ait pas lieu, ce qui peut toujours se faire, puisque C n'est point un multiple de r.

Le résultat qui vient d'être obtenu peut être complété, et l'on peut déterminer généralement combien de nombres différents, c'est-à-dire incongrus, appartiennent à l'exposant $(r^2 - 1)r^{g-1}$, ou, en général, à un quelconque de ses diviseurs. Soit er^ν un *de ces diviseurs* où l'on suppose e facteur de $r^2 - 1$ et $\nu \leqq g - 1$; le nombre demandé sera donné par l'expression $\varphi(e)\psi(r^\nu)$, où $\varphi(e)$ désigne le nombre des termes

qui, dans la série $0, 1, 2, \ldots, e-1$, n'ont aucun facteur commun avec e. Mais comme il est inutile de connaître ce nombre pour le but que nous nous proposons, nous ne nous arrêterons pas plus longtemps à cette détermination. La seule chose qui nous importe ici, c'est la forme du nombre qui appartient à l'exposant r^{g-1}, et elle est très-facile à déterminer. Si $\mathfrak{c}$ appartient à cet exposant, de telle sorte que $\mathfrak{c}^{r^{g-1}}-1$ soit divisible par r^g, et par conséquent aussi par r, alors r^{g-1} sera un multiple de l'exposant auquel $\mathfrak{c}$ appartient pour le module r. Comme le dernier exposant doit être, d'un autre côté, un diviseur de r^2-1, il doit avoir pour valeur 1, c'est-à-dire que $\mathfrak{c}$ est de la forme $1+zr$, et il ne reste plus à chercher que la condition à laquelle z doit être assujetti pour que $1+zr$ appartienne effectivement à l'exposant r^{g-1} pour le module r^g. Dans ce but, on remarquera que, d'après le lemme précédent, $(1+zr)^{r^{g-1}}-1$ est évidemment divisible par r^g; ainsi l'exposant auquel $1+zr$ appartient divise r^{g-1}, et par conséquent ne sera pas autre chose que r^{g-1} lui-même, pourvu que z soit tel que la congruence

$$(1+zr)^{r^{g-2}} \equiv 1 \pmod{r^g}$$

n'ait pas lieu. Si l'on donne à celle-ci la forme suivante, à l'aide du lemme,

$$zr^{g-1} \equiv 0 \pmod{r^g},$$

on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{c}$ appartienne à l'exposant r^{g-1} consiste en ce que $\mathfrak{c}$ soit contenu dans l'expression $1+zr$ et que z ne soit point un multiple de r.

Cela étant supposé, il nous sera facile de démontrer que, $\mathfrak{b}$ étant un nombre donné appartenant à l'exposant $(r^2-1)r^{g-1}$, on pourra toujours trouver un second nombre $\mathfrak{c}=1+zr$ appartenant à l'exposant r^{g-1}, qui sera de telle nature que la congruence

$$\mathfrak{b}^{\beta} = \mathfrak{c}^{\gamma} \pmod{r^g},$$

dans laquelle β et γ désignent des termes contenus dans la série

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ (r^2-1)r^{g-1}-1;\quad 0,\ 1,\ldots,\ r^{g-1}-1,$$

ne puisse exister qu'à la condition de $\beta=0$, $\gamma=0$. Nous remarquerons aussitôt que l'une de ces deux équations $\beta=0$, $\gamma=0$, résulte évidemment de l'autre; ainsi il nous suffira de montrer que c peut être choisi de telle manière, que la congruence soit impossible quand β et γ sont tous deux différents de zéro. En deuxième lieu, il est facile de voir que la possibilité de la congruence suppose la divisibilité de β par r^2-1. Posons donc $\beta=(r^2-1)\beta'$, et ensuite $\beta^{r^2-1}=1+kr$, où k désigne un nombre donné qui n'est pas divisible par r. Notre congruence devient

$$(1+kr)^{\beta'}\equiv(1+zr)^{\gamma}\ (\text{mod. } r^g),$$

et il suffit maintenant de disposer de z, de façon que cette congruence n'existe plus lorsque β' et γ sont pris tous les deux dans la série $1,\ 2,\ldots,\ r^{g-1}-1$. Comme $1+kr$ et $1+zr$ appartiennent à l'exposant r^{g-1}, et par suite $(1+kr)^{\beta'}$ et $(1+zr)^{\gamma}$ aux exposants $r^{g-1-\lambda}$ et $r^{g-1-\mu}$, où r^{λ} et r^{μ} désignent les plus hautes puissances de r qui entrent dans β' et γ, il est évident que notre congruence exige que l'on ait $\lambda=\mu$, et elle devient, quand on pose $\beta'=r^{\lambda}\beta''$ et $\gamma=r^{\lambda}\gamma'$,

$$(1+kr)^{\beta''r^{\lambda}}\equiv(1+zr)^{\gamma'r^{\lambda}}\ (\text{mod. } r^g).$$

Comme $\lambda \overset{=}{<} g-2$, et comme cette dernière congruence est supposée juste pour $\lambda<g-2$, elle subsistera encore pour $\lambda=g-2$, et ainsi il nous reste seulement à prouver que, pour une valeur convenablement choisie pour z, la congruence

$$(1+kr)^{\beta''r^{g-2}}\equiv(1+zr)^{\gamma'r^{g-2}}\ (\text{mod. } r^g)$$

ne saurait avoir lieu.

D'après le lemme précédent, cette congruence est identique à celle-ci,

$$(\gamma'z-\beta''k)r^{g-1}\equiv 0\ (\text{mod. } r^g),$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci,

$$\gamma' z \equiv \beta'' k \pmod{r}.$$

Qu'on remarque maintenant que, les nombres γ' et β'', non divisibles par r, étant réels, on pourra toujours déterminer un nombre réel δ évidemment non-divisible par r, qui soit tel que

$$\beta'' \equiv \gamma' \delta \pmod{r};$$

ce qui transforme la dernière congruence en

$$z \equiv k\delta \pmod{r}.$$

Or δ, et par suite $k\delta$, ne peut recevoir que $r-1$ valeurs incongrues d'après le module r, tandis que z, qui est assujetti à l'unique condition de ne point être divisible par r, peut prendre r^2-1 valeurs différentes; on voit donc qu'il existe pour z,

$$r^2 - 1 - (r-1) = r(r-1)$$

valeurs incongrues qui jouissent de la propriété de rendre impossible la dernière congruence. *C. Q. F. D.*

Nous venons de démontrer que pour les bases $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ déterminées de la manière indiquée et appartenant aux exposants $(r^2-1)r^{g-1}$ et r^{g-1}, la congruence

$$\mathfrak{b}^{\beta} = \mathfrak{c}^{\gamma} \pmod{r^g},$$

dans laquelle β et γ sont des nombres de ces séries

$$0, 1, 2, \ldots, (r^2-1)r^{g-1} - 1; \quad 0, 1, 2, \ldots, r^{g-1} - 1,$$

ne peut subsister que dans le cas où $\beta = \gamma = 0$; ce résultat peut s'exprimer d'une manière un peu différente, et l'on se convaincra sans difficulté qu'on en peut déduire que l'expression

$$\mathfrak{b}^{\beta}\,\mathfrak{c}^{\gamma}$$

donne, pour toutes les combinaisons β, γ dont le nombre

$$(r^2-1)r^{g-1}.r^{g-1} = (r^2-1)r^{2g-2} = \psi(r^g),$$

des nombres incongrus d'après le module r^g, c'est-à-dire deviendra congru une seule fois à chaque nombre n non divisible par r. Les valeurs de β et de γ, pour lesquelles cela a lieu, seront nommées indices de n et seront désignées par β_n et γ_n. Il est évident que les nombres congrus ont mêmes indices, et l'on voit aisément comment les indices d'un produit se déduisent des indices de ses facteurs. Comme

$$\mathfrak{c} \equiv 1 \pmod{r},$$

de $\mathfrak{b}^{\beta_n}\mathfrak{c}^{\gamma_n} \equiv n \pmod{r^g}$ il suit aussitôt

$$\mathfrak{b}^{\beta_n} \equiv n \pmod{r},$$

et par conséquent, $\mathfrak{b}$ étant évidemment non-résidu quadratique de r, β_n sera pair ou impair, suivant que r sera résidu ou non-résidu quadratique de r; ou bien, en employant les symboles adoptés plus haut,

$$\left[\frac{n}{r}\right] = (-1)^{\beta_n}. \tag{6}$$

3. Il nous reste encore à examiner le cas où le module est une puissance de $1 + i$.

Soient x et e deux nombres positifs dont le second est impair; soit, en outre, t un nombre complexe arbitraire, mais impair. Puisque

$$[1 + t(1+i)^x]^e = 1 + et(1+i)^x + \ldots,$$

dont les termes, à partir du troisième inclusivement, sont évidemment divisibles par $(1+i)^{x+1}$, il s'ensuit que $[1 + t(1+i)^x]^e$ aura la forme $1 + t'(1+i)^x$, où t' est aussi impair. En outre, si l'on suppose $x \geqq 3$,

$$[1 + t(1+i)^x]^2 = 1 + t'(1+i)^{x+2},$$

où t' est aussi impair. Si l'on combine ces deux résultats, on trouve sans difficulté que, dans la supposition de $x \geqq 3$, on a toujours

$$[1 + t(1+i)^x]^6 = 1 + t'(1+i)^{2x+2},$$

où t' est impair ainsi que t, et où ρ est l'exposant de la plus forte puissance de 2 qui entre dans θ.

Il suffit à l'objet que nous avons en vue que l'exposant de la puissance de $1+i$ que l'on prend pour module soit impair et $\overset{=}{>} 7$. Soit donc le module $= (1+i)^{3+2h}$, de telle sorte que $h \overset{=}{>} 2$. Qu'on fasse $x = 3$, ou $= 4$ dans le résultat précédemment obtenu, et l'on verra aussitôt que $1 + t(1+i)^x$ appartient à l'exposant 2^h pour le module $(1+i)^{3+2h}$. Cela étant supposé, il est facile de se convaincre que les deux nombres appartenant à l'exposant 2^h, savoir, $1 + t(1+i)^3$ et $1 + u(1+i)^4$, dans lesquels t et u sont impairs, possèdent toujours la propriété de rendre impossible, pour tout autre cas que celui où $\delta = \varepsilon = 0$, la congruence

$$[1 + t(1+i)^3]^\delta \equiv [1 + u(1+i)^4]^\varepsilon \,[\text{mod. } (1+i)^{3+2h}],$$

dans laquelle δ et ε sont des termes de la série

$$0, 1, 2, \ldots, 2^h - 1.$$

Dans le fait, puisque chacune de ces deux suppositions $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, entraîne nécessairement l'autre comme conséquence, il nous suffira de montrer que notre congruence devient impossible quand δ et ε sont tous deux différents de zéro. Désignons les plus hautes puissances de 2, qui entrent respectivement dans δ et dans ε, par 2^ρ et 2^σ, où $\rho < h$, $\sigma < h$, les deux membres seront respectivement contenus dans les deux formes

$$1 + t'(1+i)^{3+2\rho}, \quad 1 + u'(1+i)^{4+2\sigma},$$

où t' et u' représentent des nombres impairs. Substituons ces valeurs, il vient

$$t'(1+i)^{3+2\rho} \equiv u'(1+i)^{4+2\sigma} \,[\text{mod. } (1+i)^{3+2h}];$$

cette congruence est évidemment impossible, puisque les deux exposants $3 + 2\rho$ et $4 + 2\sigma$ sont inégaux et tous deux moindres que $3 + 2h$.

Posons, comme cas particulier, $t = 1$, $u = -1$; alors la congruence

$$-1 + 2i)^\delta \equiv 5^\varepsilon [\text{mod. } (1+i)^{3+2h}]$$

ne peut subsister que dans le cas où l'on supposerait $\delta = \varepsilon = 0$, ou bien, ce qui revient au même, comme il est facile de s'en convaincre, l'expression

$$(-1+2i)^{\delta}\, 5^{\varepsilon}$$

ne donne que des nombres incongrus d'après le module $(1+i)^{3+2h}$ pour toutes les combinaisons δ, ε, dont le nombre est évidemment 2^{2h}. Tous ces nombres sont primaires, c'est-à-dire $\equiv 1\,[\text{mod.}\,(1+i)^3]$, puisque $-1+2i$ et 5 possèdent eux-mêmes cette propriété. Remarquons actuellement que pour chaque module divisible par $(1+i)^3$, deux nombres impairs congrus sont à la fois primaires ou à la fois non primaires, et que, par suite, notre expression ne peut devenir congrue qu'aux nombres primaires; en outre, il est facile de voir que, pour le module $(1+i)^{3+2h}$, il n'existe que $\frac{1}{4}\psi[(1+i)^{3+2h}] = 2^{2h}$ nombres impairs primaires incongrus entre eux; on voit donc que l'expression précédente devient congrue une fois, mais une fois seulement, à chaque nombre primaire impair n. Les exposants δ_n, ε_n, pour lesquels cela arrive, seront nommés, à leur tour, les indices de n, et il est évident qu'on obtiendra le premier ou le second indice d'un produit, si, de la somme des premiers ou des seconds indices des facteurs, on supprime le plus grand multiple de 2^h qui y soit contenu. Les indices δ_n, ε_n possèdent, en outre, des propriétés analogues à celles dont nous avons fait mention dans les conclusions des deux numéros précédents et qui sont, comme celles-ci, relatives à la théorie des résidus quadratiques. Posons

$$(-1+2i)^{\delta_n}\, 5^{\varepsilon_n} = \lambda' + \nu' i,$$

où λ' et ν' sont respectivement pairs et impairs; on a, d'après les équations (e) et (f), démontrées dans le § VIII du Mémoire cité,

$$(-1)^{\frac{\lambda'^2+\nu'^2-1}{4}} = \left[\frac{i}{\lambda'+\nu' i}\right] = \left[\frac{i}{-1+2i}\right]^{\delta_n} \left(\frac{i}{5}\right)^{\varepsilon_n},$$

$$(-1)^{\frac{(\lambda'+\nu')^2-1}{8}} = \left[\frac{1+i}{\lambda'+\nu' i}\right] = \left[\frac{1+i}{-1+2i}\right]^{\delta_n} \left[\frac{1+i}{5}\right]^{\varepsilon_n};$$

et par conséquent, puisque

$$\left[\frac{i}{-1+2i}\right]=-1,\quad \left[\frac{i}{5}\right]=1,\quad \left[\frac{1+i}{-1+2i}\right]=1,\quad \left[\frac{1+i}{5}\right]=-1,$$

$$(-1)^{\frac{\lambda'^2+\nu'^2-1}{4}}=(-1)^{\delta_n},\qquad (-1)^{\frac{(\lambda'+\nu')^2-1}{8}}=(-1)^{\varepsilon_n}.$$

Posons maintenant $n=\lambda+\nu i$; remarquons ensuite que, en vertu de la congruence

$$\lambda+\nu i\equiv\lambda'+\nu' i\ (\text{mod. } 8),$$

résultant de ce que 8 est un facteur de $(1+i)^{3+2h}$, λ et ν ne diffèrent respectivement de λ' et de ν' que d'un multiple de 8; on voit donc que l'on peut remplacer λ', ν' par λ, ν dans les équations que nous venons d'obtenir, et l'on trouve

$$(7)\quad n=\lambda+\nu i,\quad (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}=(-1)^{\delta_n},\quad (-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}=(-1)^{\varepsilon_n}.$$

4. Nous sommes maintenant en état de pouvoir considérer un nombre quelconque k comme module; cependant, pour éviter toute prolixité inutile, nous nous bornerons au cas où k est pair, la plus haute puissance de $1+i$ qui y entre ayant la forme $3+2h$, et h étant $\geqq 2$. Soit le nombre k, abstraction faite du facteur i^g égal au produit des puissances des nombres premiers

$$(8)\qquad (a+bi)^f,\quad (a'+b'i)^{f'},\ldots;\quad r^g,\ r'^g,\ldots;\quad (1+i)^{3+2h}.$$

Les nombres premiers impairs et à deux termes $a+bi$, $a'+b'i$,..., que nous supposerons primaires pour plus de simplicité, sont inégaux, et r, r',... sont des nombres premiers à un terme, positifs et différents les uns des autres. Que l'on choisisse maintenant d'après les prescriptions des trois numéros précédents, pour chacun des modules (8), une ou deux bases

$$(9)\qquad \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}',\ldots;\quad \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ldots;\quad -1+2i,\ 5,$$

et l'on obtiendra pour chaque n, nombre premier relatif à k, et en

même temps primaire, une série d'indices

$$(10) \qquad \alpha_n, \alpha', \ldots; \quad \beta_n, \gamma_n, \beta'_n, \gamma'_n, \ldots; \quad \delta_n, \varepsilon_n,$$

que l'on devra appeler le système des indices de n, et qui est complétement déterminée si l'on choisit les bases une fois pour toutes. Il est clair que les nombres congrus n et n' ont même système d'indices, et l'inverse de cette loi a également lieu, parce que, dans la supposition de l'identité de système pour deux nombres n et n', on a la congruence $n \equiv n'$ pour chacun des modules (8), et par conséquent aussi pour le module k. Si l'on considère le nombre des valeurs qui peuvent être attribuées à chacun des indices (10) en particulier, on voit aussitôt que le nombre des systèmes différents (10) sera exprimé par le produit

$$(p-1)p^{f-1}.(p'-1)p'^{f'-1}\ldots \times (r^2-1)r^{2g-2}.(r'^2-1)r'^{2g'-2}\ldots \times 2^{2h},$$

c'est-à-dire par $\frac{1}{4}\psi(k)$, comme cela doit être en effet, puisque $\frac{1}{4}\psi(k)$ coïncide évidemment avec le nombre de tous les nombres incongrus d'après le module k, qui n'ont avec k aucun facteur commun, et qui sont, en outre, primaires.

Comme nous aurons souvent à considérer, dans les paragraphes suivants, une série de nombres jouissant de la propriété dont nous venons de parler, c'est-à-dire une série qui ne contient qu'un seul terme qui soit congru, d'après le module k, avec tout nombre premier avec k et, en outre, primaire, nous conviendrons de désigner par

$$(11) \qquad l$$

le terme général d'une pareille série de nombres composée de $\frac{1}{4}\psi(k)$ termes.

§ III.

Revenons actuellement au théorème que nous avons désigné, dans l'introduction, comme l'objet de ce Mémoire, théorème d'après lequel la formule

$$kt + l$$

contient un nombre infini de nombres premiers, lorsque les nombres

donnés k et l n'ont point de diviseur commun, et observons qu'on peut évidemment, sans restreindre la généralité, considérer k comme divisible par $1+i$, et regarder comme impair et $\overset{=}{>} 7$ l'exposant de la plus haute puissance de $1+i$ qui entre dans k; de la sorte, k devient de la forme supposée dans le paragraphe précédent, art. 4. Rappelons, en outre, que quatre nombres corrélatifs sont toujours à la fois premiers ou non premiers, et il devient évident que l peut être considéré comme nombre primaire, et que cette lettre peut recevoir la signification qui lui a été donnée par l'équation (11).

Cela étant, formons, en conservant toutes les désignations employées dans le § II, art. 4, les équations binômes suivantes, qui répondent aux bases de l'équation (9), d'après la série,

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi^{(p-1)p^{f-1}} = 1,\ \varphi'^{(p'-1)p'^{f'-1}} = 1, \ldots; \\ \psi^{(r^2-1)r^{g-1}} = 1, \quad \chi^{r^{g-1}} = 1, \quad \psi'^{(r'^2-1)r'^{g'-1}} = 1, \quad \chi'^{r'^{g'-1}} = 1, \ldots; \\ \theta^{2^h} = 1, \quad \eta^{2^h} = 1. \end{cases}$$

Posons, en outre, pour abréger,

$$\Omega_n = \varphi^{\alpha_n} \varphi'^{\alpha'_n} \ldots \times \psi^{\beta_n} \chi^{\gamma_n} \psi'^{\beta'_n} \chi'^{\gamma'_n} \ldots \times \theta^{\vartheta_n} \eta^{\varepsilon_n}.$$

Ce produit, ainsi formé, possède plusieurs propriétés très-faciles à démontrer et importantes pour ce qui va suivre; ce sont elles qui vont nous occuper avant tout. Si l'on se représente les racines de l'unité contenues dans Ω comme constantes, on a évidemment

$$(13)\qquad \Omega_{nn'} = \Omega_n \Omega_{n'},$$

et si l'on admet que $n' \equiv n \pmod{k}$,

$$(13')\qquad \Omega_{n'} = \Omega_n.$$

En continuant toujours de supposer qu'on ne change point les racines de l'unité contenues dans Ω, et en étendant le symbole $\sum$ à toutes les valeurs de l définies en l'équation (11),

$$(14)\qquad \sum \Omega_l = 0, \quad \text{ou} \quad \sum \Omega_l = \tfrac{1}{4}\psi(k),$$

selon qu'il se trouve parmi les racines $\varphi, \varphi', \ldots; \psi, \chi, \psi', \chi', \ldots; \theta, \alpha$, au moins une qui diffère de l'unité positive, ou que toutes ces racines lui sont égales. Dans le fait, puisqu'à tous les l répondent tous les systèmes possibles de l'équation (10), notre somme peut se décomposer facilement en facteurs dont chacun ne contiendrait qu'une seule des racines indiquées plus haut. Celui de ces facteurs où φ se présente est évidemment

$$1 + \varphi + \varphi^2 + \ldots + \varphi^{(p-1)p^{f-1}-1},$$

et par conséquent

$$= 0, \quad \text{ou} \quad = (p-1)p^{f-1},$$

suivant que φ est différent de l'unité positive ou lui est égal ; et comme on en peut dire autant de toutes les autres, notre assertion se trouve démontrée.

Si nous nous servons dès à présent, comme nous le ferons partout dans la suite, du signe S pour désigner une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons des racines des équations (12), racines dont le nombre est évidemment $= \frac{1}{4}\psi(k)$, on a enfin

$$(15) \qquad S\Omega_n = \tfrac{1}{4}\psi(k), \quad \text{ou} \quad S\Omega_n = 0,$$

suivant que la congruence $n \equiv 1 \pmod{k}$ existe ou n'existe pas. Le premier résultat découle évidemment de ce que tous les indices (10) s'évanouissent pour $n \equiv 1$. Quant au second, pour se convaincre de sa justesse, il suffira de remarquer que $S\Omega_n$ peut être décomposé en facteurs dont chacun ne contient que les racines d'une des équations (12), et que celui de ces facteurs qui est relatif à la première n'est pas autre chose que la somme des racines de cette équation élevée à la puissance α_n. Ce facteur s'évanouira toujours pour cette raison et à cause de $\alpha_n < (p-1)p^{f-1}$, excepté lorsque l'on a $\alpha_n = 0$. Ce résultat, ainsi que les considérations analogues qui ont lieu pour les autres facteurs, ont pour conséquence immédiate la deuxième des équations (15), si l'on considère que, dans le cas où $n \equiv 1 \pmod{k}$ n'aurait pas lieu, un des indices (10), au moins, serait différent de zéro.

Cette introduction nous conduit à une démonstration facile de l'é-

quation

$$(16) \qquad \Pi \frac{1}{1 - \Omega_q \frac{1}{(\mathrm{N}q)^s}} = \sum \Omega_n \frac{1}{(\mathrm{N}n)^s} = \mathrm{L}.$$

Dans cette équation, s désigne une grandeur arbitraire positive dépassant l'unité; quant au signe de la multiplication Π et à celui de la sommation $\sum$, le premier s'étend à tous les nombres premiers primaires q qui n'entrent point dans k, tandis que le second s'applique à tous les nombres primaires qui n'ont aucun diviseur commun avec k. Les racines $\varphi, \varphi', \ldots$ qui entrent dans Ω peuvent être choisies arbitrairement, mais doivent être les mêmes dans chaque Ω, de telle sorte que notre équation générale $\frac{1}{4}\psi(k)$ représente les équations particulières répondant aux diverses combinaisons de racines. Pour nous convaincre de l'exactitude de cette équation, développons dans le premier membre le facteur général en ayant égard à l'équation (13). On obtient ainsi

$$\frac{1}{1 - \Omega_q \frac{1}{(\mathrm{N}q)^s}} = 1 + \Omega_q \frac{1}{(\mathrm{N}q)^s} + \Omega_{q^2} \frac{1}{(\mathrm{N}.q^2)^s} + \text{etc.}\ldots$$

Qu'on exécute maintenant la multiplication indiquée, qu'on se souvienne que, d'après l'équation (4), chaque nombre n ne peut être représenté comme produit de puissances de nombres premiers primaires que d'une seule façon, et le premier membre de notre équation se transforme dans le second. *C. Q. F. D.*

§ IV.

Nous allons maintenant considérer de plus près la série générale L, équation (16), qui a évidemment une valeur finie et indépendante de la manière dont les termes se suivent aussi longtemps que $s > 1$, et nous chercherons, en particulier, à déterminer comment cette valeur varie lorsqu'en posant $s = 1 + \rho$, on fait la variable positive ρ infiniment petite. La série L, but de nos recherches actuelles, se décompose en $\frac{1}{4}\psi(k)$ séries partielles dont chacune contient tous les termes où n est congru selon le module k au même nombre l. équation (11). Une

quelconque de ces séries partielles devient

$$W = \sum \frac{1}{N(kt+l)^{1+\rho}},$$

lorsqu'on y supprime dans tous ses termes le facteur commun Ω; là le signe $\sum$ comprend tous les nombres entiers complexes t. Nous avons montré, dans le Mémoire intitulé *Rech. sur les form.*, § XVIII. art. 3. que cette dernière série devient égale à l'expression $\frac{\pi}{N(k)}\frac{1}{\rho}$ lorsque ρ devient infiniment petit. Ce résultat peut être complété à l'aide des considérations développées au lieu cité, et l'on prouve facilement que

$$W = \frac{\pi}{N(k)}\frac{1}{\rho} + A + \rho F(\rho),$$

où A désigne une constante réelle, et $F(\rho)$ une fonction réelle de ρ qui tend vers une limite finie quand ρ devient infiniment petit. Il s'ensuit immédiatement, en tenant compte de l'équation (14), que

$$(17) \qquad L = \frac{\pi\psi(k)}{4N(k)}\frac{1}{\rho} + F(\rho), \quad \text{ou} \quad L = A + A'i + \rho[\Phi(\rho) + i\Phi'(\rho)],$$

suivant que les racines de l'unité contenues dans L sont toutes égales aux racines positives de l'unité, ou que l'une d'elles au moins est différente de celles-ci. A et A' sont des constantes réelles, et $F(\rho)$, $\Phi(\rho)$, $\Phi'(\rho)$ sont des fonctions réelles de ρ qui tendent vers des limites finies pour des valeurs infiniment petites de la variable positive ρ.

Les séries L peuvent se partager en trois classes, d'après les différentes combinaisons de racines qu'elles contiennent. La première de ces classes consiste dans la série unique où toutes les racines de l'unité ont pour valeur 1, et qui est relative à la première des équations (17). La seconde classe embrasse toutes les autres séries où il n'y a que des racines réelles. Remarquons maintenant que les seules équations où les exposants soient impairs sont celles dont les racines sont désignées par χ, χ',..., et l'on verra que, pour représenter toutes les séries de la seconde classe, il faut combiner de toutes les manières possibles les doubles signes de

$$\varphi = \pm 1,\ \varphi' = \pm 1, \ldots;\quad \psi = \pm 1,\ \chi = \pm 1,\ \psi' = \pm 1,\ \chi' = \pm 1, \ldots;$$
$$\vartheta = \pm 1,\ \eta = \pm 1;$$

mais de toutes ces combinaisons il faut exclure celle qui répond aux signes supérieurs tous ensemble; cette combinaison unique forme la première classe. Enfin, la troisième classe comprend toutes les séries qui présentent au moins une racine imaginaire de l'unité, et l'on voit facilement que les séries de cette classe sont toujours ordonnées par couples, puisque, dans la supposition énoncée, les deux combinaisons de racines

$$\varphi,\ \varphi',\ldots;\quad \psi,\ \chi,\ \psi',\ \chi',\ldots;\quad \theta,\ \eta,$$

et

$$\frac{1}{\varphi},\ \frac{1}{\varphi'},\ldots;\quad \frac{1}{\psi},\ \frac{1}{\psi'},\ \frac{1}{\chi},\ \frac{1}{\chi'},\ldots;\quad \frac{1}{\theta},\ \frac{1}{\eta},$$

sont évidemment différentes l'une de l'autre. Dans ces séries la transition de l'une à celle qui lui est coordonnée a lieu en changeant i en $-i$ dans la deuxième équation (17), tandis que les termes imaginaires de cette équation disparaissent pour les séries de la seconde classe, auxquelles l'équation citée appartient également.

Quand ρ devient infiniment petit, la valeur de la série qui constitue la première classe croît par-delà toute limite positive, tandis que les valeurs de toutes les autres séries tendent vers des limites finies, comme on peut s'en convaincre d'après l'équation (17). Cela n'est cependant pas suffisant pour le but que nous nous proposons, et il nous faut encore faire voir que toutes ces limites sont différentes de zéro, c'est-à-dire qu'on n'a pas à la fois $A = 0$, $A' = 0$ dans la seconde des équations (17). Admettons un instant que cette preuve soit faite pour toutes les séries de la seconde classe. Cette supposition admise, nous montrerons, dans le paragraphe suivant, que cette assertion est vraie pour la troisième classe, et nous en déduirons aussitôt la loi posée au commencement du § III, en sorte qu'il ne nous restera plus qu'à démontrer, à la fin de ce Traité, la propriété supposée à l'égard des séries de la seconde classe.

§ V.

Prenons les logarithmes népériens des deux membres de l'équation (16) et développons, il vient

$$\ldots + \frac{1}{\mu}\sum \Omega_{q^\mu}\,\frac{1}{(Nq)^{u+\mu\rho}} + \ldots = \log L.$$

Dans cette équation nous nous sommes bornés, pour abréger, à écrire le terme général dans lequel on doit attribuer successivement à μ toutes les valeurs depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = \infty$; de plus, le signe de la sommation s'y rapporte à tous les nombres q. Soit maintenant l un nombre déterminé quelconque parmi ceux qui ont été définis sous le numéro (11), et posons

$$ll' \equiv 1 \pmod{k},$$

où l' est, comme l, un nombre primaire et premier avec k. Multiplions notre équation par Ω_l, et faisons la sommation d'après toutes les combinaisons possibles de racines, il vient

$$\ldots + \frac{1}{\mu}\sum (S\Omega_{l'q^\mu})\frac{1}{(Nq)^{\mu+\mu\rho}} + \ldots = S\Omega_{l'} \log L.$$

Maintenant, d'après l'équation (15),

$$S\Omega_{l'q^\mu} = 0.$$

excepté quand

$$l'q^\mu \equiv 1,$$

ou bien, ce qui revient au même, excepté quand

$$q^\mu \equiv l \pmod{k},$$

auquel cas la valeur de la somme devient $\frac{1}{4}\psi(k)$. L'équation devient ainsi

$$(18) \qquad \sum \frac{1}{(Nq)^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{(Nq)^{2+2\rho}} + \ldots = \frac{4}{\psi(k)} S\Omega_{l'} \log L.$$

où le signe $\sum$ s'étend dans le premier, le deuxième,... terme respectivement, aux nombres premiers q dont les premières, deuxiemes,... puissances sont

$$\equiv l \pmod{k}.$$

Posons spécialement

$$l \equiv 1,$$

alors on a

$$l' \equiv 1 \pmod{k}, \quad \Omega_{l'} = 1,$$

et le résultat général se transforme en

$$\sum \frac{1}{(Nq)^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{(Nq)^{2+2\rho}} + \ldots = \frac{4}{\psi(k)}\,\mathrm{S.log\,L}.$$

Considérons actuellement la somme S log L pour le cas où ρ devient infiniment petit. Les termes correspondants aux séries de la deuxième classe tendent ensemble vers des limites finies; au contraire, le terme correspondant à la première classe prend alors une valeur positive infiniment grande, puisque ce terme peut être mis, d'après l'équation (17), sous la forme

$$\log\left(\frac{1}{\rho}\right) + \log\left(\frac{\pi\psi(k)}{4\,\mathrm{N}(k)} + \rho\,\mathrm{F}(\rho)\right),$$

dont la première partie devient infinie tandis que la seconde tend vers une limite finie. Supposons maintenant que la limite finie d'une série de la troisième classe soit égale à zéro, c'est-à-dire supposons que l'on ait, dans l'équation (17),

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{A}' = 0;$$

alors de la réunion des deux membres qui, dans notre somme, répondent à cette série et à celle qui lui est coordonnée, résultera l'expression suivante :

$$-2\log\left(\frac{1}{\rho}\right) + \log\left[\varphi(\rho)^2 + \varphi'(\rho)^2\right].$$

Apres avoir combiné cette expression avec la précédente, la somme contiendra le terme $-\log\left(\frac{1}{\rho}\right)$ qui prend une valeur négative infiniment grande, et qui ne peut être détruit par $\log[\varphi(\rho^2) + \varphi'(\rho^2)]$, puisque ce dernier logarithme peut seulement avoir une limite finie, ou bien prendre lui-même une valeur négative infiniment grande. Ce résultat est en contradiction avec notre équation précédente, dont le premier membre ne contient que des termes positifs, et cette contradiction serait encore évidemment renforcée si l'on voulait considérer comme évanouissantes les valeurs des limites pour plus d'un couple de séries coordonnées de la troisième classe. Il est ainsi prouvé, réserve faite de la démonstration qu'il nous reste à donner pour les séries de

deuxième classe, que log L tend toujours vers une limite finie, excepté dans le seul cas où L désigne la série de la première classe, car alors notre logarithme peut devenir plus grand que tout nombre donné positif.

Revenons à présent à l'équation générale (18); nous voyons que le deuxième membre, et par conséquent aussi le premier membre, devient infini quand ρ devient infiniment petit. Mais, maintenant, la somme de toutes les séries qui se trouvent dans le premier membre, à partir de la seconde inclusivement, reste finie, puisque

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{(\mathrm{N}q)^2}+\frac{1}{3}\sum\frac{1}{(\mathrm{N}q)^3}+\ldots$$

est encore finie même lorsqu'on ne borne point les sommations, comme nous le faisons ici, à certains nombres premiers q, et qu'on l'étend à tous les nombres entiers dont la norme surpasse l'unité. Il faut donc que ce soit la somme $\sum\frac{1}{(\mathrm{N}q)^{1+\rho}}$ qui croisse au delà de toute limite finie, ce qui exige que le nombre de ses termes soit infini; elle donnera donc alors un nombre infini de nombres premiers tous contenus dans la forme $kt+l$. *C. Q. F. D.*

§ VI.

Afin de compléter la démonstration que nous venons d'exposer, il faut encore faire voir que, pour chaque série de deuxième classe, la limite correspondante à une valeur infiniment petite de ρ est différente de zéro. Une série de ce genre contient une combinaison de racines de la forme

$$\varphi=\pm 1,\ \varphi'=\pm 1,\ldots;\quad \psi=\pm 1,\ \chi=1,\ \psi'=\pm 1,\ \chi'=1,\ldots;$$
$$\theta=\pm 1,\ \eta=\pm 1.$$

Formons le produit de ceux d'entre les nombres premiers

$$a+bi,\quad a'+b'i,\ldots;\quad r,\ r',\ldots,$$

auxquels, dans cette combinaison de racines, répond une racine égale à l'unité négative, à savoir, φ, φ',...; ψ, ψ',..., et désignons le

produit de ces nombres premiers par Q, et par V le produit de tous les autres (il va sans dire que si, dans un de ces groupes, il ne se trouve point de nombre premier, on remplacera Q ou V par l'unité); alors l'expression Ω_n, contenue dans le terme général de la série, pourra prendre la forme suivante, d'après les résultats obtenus en l'équation (5) et en l'équation (6):

$$\Omega_n = \left[\frac{n}{Q}\right] \theta^{\delta_n} \eta^{\varepsilon_n}.$$

Posons, en outre, comme plus haut,

$$n = \lambda + \nu i,$$

il vient

$$\theta^{\delta_n} = \theta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}, \quad \eta^{\varepsilon_n} = \eta^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}.$$

Si $\theta = 1$, la première de ces équations est évidente; si, au contraire, $\theta = -1$, elle coïncide avec une des équations désignées par la formule (7), et il en arrive autant de la seconde.

La limite d'une série quelconque de la deuxième classe est par conséquent

$$\sum \theta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}} \eta^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}} \left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right] \frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\rho}},$$

où ρ est supposé infiniment petit; le signe $\sum$ s'étend à tous les nombres impairs primaires $\lambda + \nu i$ qui n'ont aucun facteur commun avec k, ou avec QV, ce qui revient au même; remarquons encore qu'on ne peut avoir simultanément

$$Q = 1, \quad \theta = 1, \quad \eta = 1,$$

car, dans cette supposition, la combinaison des racines considérée plus haut répondrait à la série L de la première classe. Mais maintenant notre série est, avec cette restriction, toujours contenue dans la série générale qui, comme nous l'avons montré dans le Mémoire déjà souvent cité, exprime, abstraction faite d'un facteur fini, le nombre des classes comprenant toutes les formes quadratiques pour un déterminant arbitraire non quadratique. Que l'on compare avec la série ci-dessus celle que nous avons trouvée dans l'ouvrage cité, § XVIII,

équation (18), pour l'expression de ce nombre, et l'on verra que la première est relative aux quatre déterminants

$$QV^2, \quad iQV^2, \quad (1+i)QV^2, \quad i(1+i)QV^2,$$

d'après les quatre combinaisons respectives de racines qui peuvent s'y présenter.

$$\theta=1,\ \eta=1; \quad \theta=-1,\ \eta=1; \quad \theta=1,\ \eta=-1; \quad \theta=-1,\ \eta=-1.$$

De là résulte immédiatement la propriété qu'il s'agit de démontrer; car, si notre série se réduisait à zéro, alors le nombre des classes des formes quadratiques deviendrait aussi nul pour le déterminant correspondant, ce qui est impossible, puisque ce nombre est toujours au moins égal à l'unité.

Nous terminerons par une remarque destinée à éclaircir la comparaison que nous avons précédemment indiquée; cette remarque consiste en ce qu'on peut, sans changer la valeur de la série trouvée à l'endroit cité, étendre la sommation dans cette série à tous les nombres impairs primaires $\lambda+\nu i$ sans facteurs communs avec le déterminant, auxquels cette dénomination est applicable dans le sens adopté dans le présent Mémoire. Cela résulte immédiatement de ce que, pour un groupe quelconque de nombres impairs assemblés, le nombre considéré comme primaire d'après une définition, est évidemment égal ou opposé à celui qui lui correspond dans l'autre définition, et que, de plus, un terme quelconque de la série reste invariable quand on y change $-\lambda+\nu i$ en $-\lambda-\nu i$.

NOTE

Sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. Soient entre les neuf quantités a, a', a'', b,... les six relations

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1, & b^2+b'^2+b''^2=1, & c^2+c'^2+c''^2=1, \\ bc+b'c'+b''c''=0, & ca+c'a'+c''a''=0, & ab+a'b'+a''b''=0. \end{cases}$$

On sait que l'on peut en déduire les six relations inverses

$$(2)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & a'^2+b'^2+c'^2=1, & a''^2+b''^2+c''^2=1, \\ a'a''+b'b''+c'c''=0, & a''a+b''b+c''c=0, & aa'+bb'+cc'=0; \end{cases}$$

et encore les neuf suivantes, dans lesquelles on doit prendre à la fois tous les signes supérieurs ou tous les signes inférieurs des premiers membres :

$$(3)\quad \begin{cases} \pm a=b'c''-c'b'', & \pm a'=cb''-bc'', & \pm a''=bc'-cb', \\ \pm b=c'a''-a'c'', & \pm b'=ac''-ca'', & \pm b''=ca'-ac', \\ \pm c=a'b''-b'a'', & \pm c'=ba''-ab'', & \pm c''=ab'-ba'. \end{cases}$$

Mais la manière, élégante du reste, dont on fait quelquefois cette déduction ne semble pas tout à fait directe, car elle se fonde sur l'emploi de six indéterminées qui ne sont autre chose que les coordonnées d'un même point par rapport à deux systèmes de trois droites rectangulaires lorsque les quantités a, a',... représentent des cosinus d'angles qu'elles forment entre elles [*].

[*] *Traité de Géométrie analytique*, par M. Lefébure de Fourcy, 3e édition; ou Lagrange, *Mécanique analytique*, seconde partie, section IX, 6.

Or, on peut aussi déduire les relations (2) et (3) des relations (1) de la manière directe suivante, qui me paraît avoir aussi l'avantage de mieux faire voir l'origine des binômes formant les seconds membres des relations (3).

2. Si l'on élimine successivement, entre les deux dernières équations (1) qui sont du premier degré en a, a', a'', deux de ces quantités, on obtient

$$(4) \qquad \frac{a}{b'c''-c'b''} = \frac{a'}{cb''-bc''} = \frac{a''}{bc'-cb'}.$$

La somme des carrés des trois dénominateurs de cette double égalité revient identiquement à

$$(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)-(bc+b'c'+b''c'')^2,$$

et est, par conséquent, égale à l'unité d'après les mêmes équations (1). Donc, d'après la première relation $a^2+a'^2+a''^2=1$, le carré du numérateur de chaque membre de (4) est égal au carré de son dénominateur; ce qui démontre les trois premières relations (3), dans lesquelles il faut prendre ensemble ou les trois signes supérieurs, ou les trois signes inférieurs pour que l'égalité (4) soit satisfaite.

On démontrerait de même les six autres relations (3), et la correspondance des signes, soit dans le groupe des quatrième, cinquième et sixième relation, soit dans le groupe des trois dernières.

Pour comparer les signes dans deux groupes, prenons, par exemple, la première relation $\pm b = c'a''-a'c''$ du deuxième groupe, et substituons-y les valeurs de a' et a'' tirées de celles du premier, prises avec le signe supérieur; on aura

$$\pm b = b(c'^2+c''^2)-c(b'c'+b''c'') = b(1-c^2)-c(-bc) = b.$$

ce qui exige que le signe supérieur soit adopté aussi dans le second groupe. Donc ce sont bien ou tous les signes supérieurs ensemble, ou tous les signes inférieurs ensemble qui se correspondent dans les neuf relations (3).

3. Les relations (2), inverses des relations (1), se déduisent facilement de celles (3) que nous venons de démontrer; car, 1° si, dans le

trinôme $aa' + bb' + cc'$, par exemple, on met pour a, b, c, leurs valeurs fournies par les relations (3), on le rend identiquement nul, et il en est de même des deux autres trinômes analogues, ce qui démontre les trois dernières relations inverses (2). 2° On a identiquement

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}(b'c''-c'b'')^2+(c'a''-a'c'')^2+(a'b''-b'a'')^2\\ =(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)-(a'a''+b'b''+c'c'')^2.\end{array}\right.$$

Donc

$$a^2+b^2+c^2=(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2).$$

Et l'on obtiendrait également

$$a'^2+b'^2+c'^2=(a^2+b^2+c^2)(a''^2+b''^2+c''^2),$$
$$a''^2+b''^2+c''^2=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2).$$

Multipliant deux à deux ces trois équations, on en conclut que chacun des trois trinômes tels que $a^2+b^2+c^2$ est égal à ± 1, et c'est $+1$ qu'il faut prendre si l'on considère que, d'après les trois premières équations (1), la somme de ces trinômes est égale à 3.

Les trois premières relations inverses (2) se trouvent donc aussi démontrées.

4. On aurait pu obtenir celles-ci en premier lieu, en observant que, d'après les relations (1), on a

$$(bc+b'c')^2=b''^2c''^2=(1-b^2-b'^2)(1-c^2-c'^2),$$

ce qui revient à

$$(bc'-cb')^2=1-(1-b^2-b'^2)-(1-c^2-c'^2)=1-b''^2-c''^2,$$

ou, en ayant égard à la troisième relation (3), à

$$a''^2+b''^2+c''^2=1,$$

c'est-à-dire la troisième relation inverse. Les deux premières auraient été obtenues de la même manière; et les trois dernières relations inverses (2) s'en tirent, en observant que le premier membre, ainsi que la première partie du second membre de l'identité (5), étant égaux à 1, le dernier terme doit être nul, ce qui donne

$$a'a''+b'b''+c'c''=0,$$

et ainsi des autres. De cette seconde manière, les six relations inverses (2) peuvent s'obtenir, comme l'on voit, avant d'avoir établi la correspondance des signes des neuf relations (3), et en n'employant celles-ci que sous la forme $a^2 = (b'c'' - c'b'')^2$....

5. Il reste à savoir, dans chaque cas, si l'on doit donner le signe + ou le signe — aux premiers membres des neuf relations (3). Cela ne se peut qu'en particularisant plus ou moins les neuf quantités a, a',.... Supposons, comme cela a lieu ordinairement, que ce soient les cosinus des angles formés par trois droites rectangulaires ox, oy, oz avec trois autres droites aussi rectangulaires ox_1, oy_1, oz_1, en sorte que

$$\begin{aligned} &\cos xox_1 = a, \quad \cos yox_1 = a', \quad \cos zox_1 = a'', \\ &\cos xoy_1 = b, \quad \cos yoy_1 = b', \quad \cos zoy_1 = b'', \\ &\cos xoz_1 = c, \quad \cos yoz_1 = c', \quad \cos zoz_1 = c''. \end{aligned}$$

Il faut prendre le signe + quand les droites de même nom sont disposées entre elles de la même manière dans les deux systèmes, en sorte que l'on puisse passer de l'un à l'autre en le faisant tourner autour du point de concours commun o. En effet, alors, dans le cas particulier où oy_1, oz_1 se confondent avec oy, oz, la troisième droite ox_1 doit aussi se confondre avec ox, d'où il suit que $b' = 1$, $c'' = 1$ doivent entraîner $a = 1$, les six autres cosinus étant nuls. Or cette condition ne peut être remplie qu'en donnant le signe + aux premiers membres de l'équation (3).

Plusieurs géomètres ont remarqué [*] qu'il faudrait leur donner le signe — si les droites ox_1, oy_1, oz_1 étaient disposées dans un autre ordre que ox, oy, oz. C'est ce qui aurait lieu si, sur chacun des trois plans formés par ces dernières, les mouvements de x en y, de y en z et de z en x s'exécutaient de gauche à droite pour un observateur placé au point o, comme on le suppose ordinairement; tandis que sur les trois plans formés par ox_1, oy_1, oz_1, les mouvements de même nom s'exécuteraient, au contraire, de droite à gauche. Il est facile de voir que, dans chaque système, toute permutation de deux des trois droites, tout remplace-

[*] Voyez *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de M. Cauchy, tome II, 1841, page 276.

ment d'une de ces droites, par son prolongement de l'autre côté du point o, change le sens de ces mouvements : il en serait de même du remplacement de toutes trois, mais non de deux seulement, par leurs prolongements.

6. Si les trois droites ox_1, oy_1, oz_1 du second système n'étaient point rectangulaires, on n'aurait, entre les neuf cosinus a, a',..., que les trois premières relations (1). Soient, alors, A, A', A'' les cosinus des angles formés avec ox, oy, oz par une droite ox' perpendiculaire à la fois à oy_1 et à oz_1; les trois équations

$$Ab + A'b' + A''b'' = 0, \quad Ac + A'c' + A''c'' = 0, \quad A^2 + A'^2 + A''^2 = 1,$$

résolues comme on a fait au n° 2, donneraient

$$\pm A = \frac{b'c'' - c'b''}{\sin y_1 o z_1}, \quad \pm A' = \frac{cb'' - bc''}{\sin y_1 o z_1}, \quad \pm A'' = \frac{bc' - cb'}{\sin y_1 o z_1},$$

en sorte que, lorsque ox_1, oy_1, oz_1 forment un de ces systèmes d'axes peu obliques ou presque rectangulaires entre eux que l'on est dans le cas de considérer dans quelques questions de la mécanique des corps élastiques, les binômes occupant les seconds membres des relations (3) ne sont autre chose (en négligeant les quantités très-petites du second ordre) que les neuf cosinus des angles formés avec les axes rectangulaires ox, oy, oz, par ces trois autres axes peu obliques, dits *auxiliaires*, qui coupent deux à deux ceux ox_1, oy_1, oz_1, à angle droit, et dont on se sert, comme l'on sait, pour les formules de transformation des coordonnées obliques.

Cette extension, hors du cas des axes rectangulaires, de la démonstration donnée ci-dessus des relations (3), me fait penser qu'elle est la plus directe et la plus propre à donner une idée de la nature des binômes tels que $b'c'' - c'b''$: ce sont, comme l'on voit, des cosinus d'angles formés avec trois axes ox, oy, oz par des droites à qui l'on impose pour condition d'être perpendiculaires chacune à deux autres droites ou rectangulaires ou presque rectangulaires, déterminées par des angles formés avec les mêmes axes, et dont les cosinus sont b', c', b'', c'', etc.

NOTE

Sur les flexions considérables des verges élastiques;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. Navier a ramené aux quadratures (*Résumé des Leçons à l'Ecole des Ponts et Chaussées*) la détermination des flexions très-petites prises par une verge élastique dont l'axe est une courbe plane quelconque, sous l'influence de forces qui ne changent nulle part le plan de la courbure. Il est possible d'y ramener également (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 30 octobre et 6 novembre 1843) la détermination des très-petites flexions et torsions d'une verge à double courbure ou dont le plan primitif de courbure s'est voilé.

Mais les verges peuvent prendre aussi des flexions considérables; on peut même quelquefois faire toucher leurs deux bouts primitivement éloignés, sans que pour cela leur élasticité soit altérée, et il est souvent utile de connaître ces flexions.

Les travaux d'Euler (*Nova methodus inveniendi lineas, etc., additamentum* DE CURVIS ELASTICIS) et les méthodes d'intégration des fonctions elliptiques vont nous fournir les moyens de les déterminer exactement dans un grand nombre de cas, et approximativement dans tous, en nous bornant toutefois, pour aujourd'hui, aux verges à simple courbure [*].

2. Supposons d'abord, 1° que les forces qui sollicitent la verge dans le plan de son axe n'agissent qu'isolément ou d'une manière discontinue; 2° que, dans une même portion finie de la verge, comprise

[*] Depuis que cette Note a été reçue au *Journal de Mathématiques*, M. Binet a donné, le 17 juin, et M. Wantzel, le 24 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVIII, pages 1115 et 1197), des intégrales pour le cas où une verge primitivement droite et cylindrique prend une forme à double courbure, mais sans pousser le calcul jusqu'aux formules propres aux applications, comme je me suis proposé surtout de le faire ici.

entre deux des points successifs où des forces exercent leur action (soit directement, soit par l'intermédiaire de leviers fixés à la verge), la section soit partout la même, et *l'axe soit une ligne droite ou un arc de cercle.*

Soient, après la flexion,

x, y, ρ les coordonnées rectangulaires et le rayon de courbure de l'axe en un point d'une de ces portions finies;

s la longueur de l'axe comptée jusqu'à ce point;

X, Y les composantes, parallèlement à x et y, d'une des forces qui agissent entre cette portion et l'une des deux extrémités de la verge;

x_1, y_1 les coordonnées de son point d'application (situé sur la verge ou dehors, comme on vient de le dire);

Σ l'indice de sommes relatives aux diverses forces dont on vient de parler.

Soient encore

r le rayon de courbure avant la flexion;

E un coefficient numérique dépendant de l'élasticité de la matière;

μ le moment d'inertie de la section transversale, autour d'un de ses deux axes principaux (on suppose cet axe de la section perpendiculaire au plan de courbure de l'axe de la verge, car, dans le cas contraire, le plan de courbure changerait par la flexion).

On aura, comme l'on sait, pour l'égalité des moments des forces extérieures et des forces intérieures agissant à travers la section en (x, y),

$$(1) \qquad E\mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = \Sigma\,[\mathrm{Y}(x_1 - x) - \mathrm{X}(y_1 - y)].$$

Nous ne poserons pas d'autre équation d'équilibre, parce que nous négligerons, aujourd'hui, l'effet des contractions ou dilatations longitudinales de l'axe de la verge, et des glissements transversaux de ses tranches.

Comme E, μ, r sont supposés constants ou indépendants de x, y, ainsi que les valeurs de X, Y, x_1, y_1 relatives à chaque force, l'équa-

tion précédente se réduira à la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = ax + by + c,$$

a. b, c étant trois constantes.

Cette équation différentielle s'intégrerait immédiatement comme linéaire si l'on pouvait y remplacer $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{d^2y}{dx^2}$. Navier, par cette substitution, a pu déterminer les flexions d'une verge rectiligne dans les cas où les déplacements de ses points, assez grands pour qu'il faille en tenir compte dans le moment des forces extérieures, sont cependant assez petits pour ne donner qu'une courbure très-faible à l'axe, en sorte qu'on puisse remplacer, dans le calcul, l'élément courbe ds par sa projection dx.

Mais nous ne supposons pas, dans ce qui va suivre, qu'une pareille substitution puisse se faire. Il faut donc, sans y recourir, trouver l'intégrale générale de l'équation (2).

3. Pour cela, observons que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{dx} d.\frac{dy}{ds}, \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{dy} d.\frac{dx}{ds}.$$

Si donc le second membre de l'équation (2) ne contenait que x ou que y, une première intégration serait immédiatement possible.

Or, pour réduire ainsi l'équation (2), il n'y a qu'à transformer les coordonnées x, y en d'autres x', y', ayant la même origine, ou qu'à poser

$$(3) \qquad x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

En substituant dans l'équation (2), l'expression de l'inverse $\frac{1}{\rho}$ du rayon de courbure sera la même en fonction des coordonnées nouvelles qu'elle était en fonction des anciennes. Si donc l'on égale à zéro le coefficient de y' du second membre, ou si l'on pose

$$-a \sin\alpha + b \cos\alpha = 0, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

l'équation transformée sera

$$(4)\qquad \frac{1}{dx'}\,d.\frac{dy'}{ds} = x'\sqrt{a^2+b^2} + c.$$

Elle a pour intégrale première, en appelant η la valeur de $\frac{dy'}{ds}$ pour $x' = 0$,

$$(5)\qquad \frac{dy'}{ds} = \frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta.$$

La transformation de coordonnées qui nous a donné le moyen d'intégrer a consisté à prendre l'axe des y' parallèle à la *résultante* de toutes les forces qui se trouvent en jeu pour plier la partie de la verge que l'on considère, car on a $\frac{b}{a} = -\frac{\Sigma Y}{\Sigma X}$; aussi l'idée s'en trouvait implicitement dans le Mémoire précité d'Euler, qui considère une lame sollicitée de diverses manières par une seule force et qui prend toujours l'un des deux axes coordonnés parallèle à la direction de cette force.

On tire de l'équation (5),

$$\frac{dx'}{ds} = \sqrt{1 - \frac{dy'^2}{ds^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta\right)^2},$$

d'où

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} ds &= \frac{dx'}{\sqrt{1-\left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}+cx'+\eta\right)}},\\ dy' &= \frac{dy'}{ds}\,ds = \frac{\left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}+cx'+\eta\right)dx'}{\sqrt{1-\left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}+cx'+\eta\right)^2}};\end{aligned}\right.$$

et la détermination de la courbe qu'affecte la portion de la verge après sa flexion dans l'état d'équilibre est ramenée, comme on le voit, aux quadratures [*].

---

[*] De même, toute équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x, y)$$

sera susceptible d'une première intégration si le second membre est fonction d'une ex-

4. Euler écrivait en 1744 que les expressions telles que l'équation (6) ne s'intégraient pas sous forme finie. Nous sommes aujourd'hui assez heureux pour pouvoir en écrire et en donner numériquement les intégrales au moyen des notations et des tables des fonctions dites elliptiques. Auparavant, mettons-les, comme Euler, sous une autre forme. D'abord, en faisant

$$(7) \qquad x' = x'' - \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

le terme en x' disparaît. Cette deuxième transformation de coordonnées se réduit à prendre pour axe des y' la direction même de la résultante des forces.

Ensuite, faisons cette résultante

$$(8) \qquad \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = P; \quad \text{et} \quad \frac{E\mu}{P}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Décomposons, ensuite, la quantité sous le radical en ses deux fac-

---

pression du premier degré en x, y, ou de toute autre expression (et il y en a une foule dont l'une des deux variables puisse disparaître en faisant $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$. En effet, la substitution lui donnera cette forme, en représentant $\frac{dy'}{dx'}$ par p',

$$\frac{dp'}{(\cos\alpha - p'\sin\alpha)^3} . f\left(\frac{\sin\alpha + p'\cos\alpha}{\cos\alpha - p'\sin\alpha}\right) = dx' f(x'),$$

équation dont les deux membres peuvent s'intégrer par les quadratures.

Et l'on opérera aussi la deuxième intégration par les quadratures si, après la première, l'équation est résoluble par rapport à p'. C'est ce qui arrive dans notre cas particulier $f\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$. *Alors α disparaît du premier membre,* et l'on obtient l'intégrale seconde

$$y' = \int dx' \frac{\int dx' f(x')}{\sqrt{1 - [\int dx' f(x')]^2}}.$$

On sait que beaucoup d'autres équations différentielles compliquées s'intègrent facilement par des transformations du genre des changements de coordonnées.

teurs

$$1 - \frac{x''^2}{2p^2} - \eta + \frac{c^2p^2}{2}, \quad 1 + \frac{x''^2}{2p^2} + \eta - \frac{c^2p^2}{2},$$

et faisons

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2p^2(1-\eta) + c^2p^4 = \mathrm{f}^2, \quad \text{d'où} \\ \eta = 1 + \dfrac{c^2p^2}{2} - \dfrac{\mathrm{f}^2}{2p^2} = 1 + \dfrac{c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{\mathrm{f}^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire remplaçons la constante η par une nouvelle constante f. Les deux expressions différentielles deviendront

$$(10) \quad ds = \frac{2p^2\,dx''}{\sqrt{(\mathrm{f}^2 - x''^2)(4p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2)}}, \quad dy' = \frac{(2p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2)\,dx''}{\sqrt{(\mathrm{f}^2 - x''^2)(4p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2)}}.$$

La quantité f joue un rôle important dans la discussion des courbes qu'elles représentent; elle est évidemment la plus grande valeur de l'abscisse x'', positivement ou négativement : c'est la flèche de courbure quand la verge était primitivement droite et pressée dans le sens de son axe. Les courbes, en général festonnées, sont comprises entre les deux droites parallèles $x'' = \mathrm{f}$, $x'' = -\mathrm{f}$.

5. Legendre donne (*Traité*, chap. III) deux manières de transformer les expressions comme les équations (10), en différentielles dont les intégrales soient les fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, qu'il désigne ainsi :

$$\mathrm{F}(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}. \qquad \mathrm{E}(k, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

La première manière, qui donne pour ds une transformée négative, consiste à faire

$$x'' = k \cos\psi, \quad \text{d'où} \quad \psi = \arccos \frac{x''}{\mathrm{f}}.$$

La deuxième manière, qui donne une transformée positive, consiste à prendre

$$x''^2 = \mathrm{f}^2 \frac{(4p^2 - \mathrm{f}^2)\sin^2\varphi}{4p^2 - \mathrm{f}^2 \sin^2\varphi}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \arcsin \frac{2px''}{\mathrm{f}\sqrt{4p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2}}.$$

On obtient ainsi

$$ds = \frac{-p\,d\psi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi}},$$

$$dy = \frac{-p\left(1-\frac{f^2}{2p^2}\sin^2\psi\right)d\psi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi}} = \frac{p\,d\psi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi}} - 2p\,d\psi\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi},$$

et

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}},$$

$$dy = p\frac{1-\frac{f^2}{4p^2}+\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}{\left(1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}} + 2p\left(1-\frac{f^2}{4p^2}\right)\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{p\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}} + 2p\,d\varphi\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi} - \frac{f^2}{2p}\,d\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}}\right).$$

Donc, C, C′, C_1, C'_1 représentant des constantes arbitraires, on a, par la transformée en ψ,

$$(11)\quad \begin{cases} s = C - pF\left(\frac{f}{2p}, \arccos\frac{x''}{f}\right), \\ y' = -s + C' - 2pE\left(\frac{f}{2p}, \arccos\frac{x''}{f}\right); \end{cases}$$

et, par la transformée en φ,

$$(12)\quad \begin{cases} s = C_1 + pF\left(\frac{f}{2p}, \arcsin\frac{x''}{f\sqrt{1-\frac{f^2-x''^2}{4p^2}}}\right). \\ y' = -s + C'_1 - \frac{x''\sqrt{f^2-x''^2}}{2p\sqrt{1-\frac{f^2-x''^2}{4p^2}}} + 2pE\left(\frac{f}{2p}, \arcsin\frac{x''}{\sqrt{1-\frac{f^2-x''^2}{4p^2}}}\right). \end{cases}$$

Et comme les angles ψ, φ sont liés par $\operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}}=1$, les théorèmes connus sur les fonctions elliptiques complémentaires donnent ces deux relations entre les constantes de l'équation (12) et celles de l'équation (11):

$$C_1 = C - pF\left(\frac{f}{2p}, \frac{\pi}{2}\right), \quad C'_1 = C' - 2pE\left(\frac{f}{2p}, \frac{\pi}{2}\right).$$

6. En remplaçant p, x'', y' par leurs valeurs

$$(13) \qquad p = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad x'' = x' + cp^2 = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y' = \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

on a, pour intégrale première de l'équation différentielle (2), ou de

$$(14) \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx\,d^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = ax+by+c,$$

celle (5), ou

$$(15) \qquad \frac{d(ay-bx)}{ds} = \frac{1}{2}(ax+by+c)^2 + \sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{2}f^2(a^2+b^2),$$

et, pour intégrale seconde, d'après les expressions (11),

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} s &= C - \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}} F\left[\frac{f}{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}, \operatorname{arc\,cos}\frac{ax+by+c}{f\sqrt{a^2+b^2}}\right], \\ \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}} &= -s + C' - \frac{2}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}} E\left[\frac{f}{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}, \operatorname{arc\,cos}\frac{ax+by+c}{f\sqrt{a^2+b^2}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les expressions (12) fourniraient, par la substitution, une intégrale d'une autre forme, que nous n'écrirons pas.

7. Puisque la verge est composée, par hypothèse, de parties droites ou circulaires d'une section constante, dont tous les points sont sollicités à fléchir par les mêmes forces appliquées hors de chaque partie, on pourra employer successivement, pour chacune, les formules qu'on vient de donner; chaque point de la courbe d'axe nouvelle répondra au point de la courbe d'axe ancienne pour lequel l'arc s a la même

longueur, à partir d'une extrémité, car on a supposé (n° 2) que l'axe n'éprouvait ni contraction ni dilatation On assujettira donc les longueurs des diverses parties à être restées égales aux longueurs primitives; on assujettira aussi les axes des parties consécutives à avoir des coordonnées communes et une tangente commune aux points de jonction : de cette manière les intégrales premières (15) et les intégrales secondes (16) fourniront, et les valeurs des constantes f, C, C′ ou C_1, C'_1, et les coordonnées nouvelles d'un point quelconque de la verge, répondant à un point donné sur cette verge avant sa flexion, ce qui sera la solution complète du problème proposé.

8. Maintenant, supposons que la verge élastique affecte primitivement la forme d'une courbe plane quelconque, que sa section soit variable comme sa courbure, enfin que, parmi les forces sollicitantes, il y en ait qui agissent d'une manière continue ou en tous les points de la verge, en sorte que la résultante qui produit le moment de flexion varie aussi d'un point à l'autre.

Ces circonstances rendront généralement impossibles les intégrations ci-dessus, et le problème de la flexion ne sera résoluble alors que par des méthodes d'approximation.

Mais en voici une qui n'exige pas d'autres calculs que ceux des articles précédents, et qui suffira ordinairement.

Supposons que l'on ait divisé la verge en un nombre suffisant de parties pour que, dans chacune, le rayon de courbure primitif, la section et la résultante des forces puissent être regardées comme sensiblement constantes, on peut appliquer à chacune les équations ci-dessus. Mais on peut faire mieux : on peut, en posant

$$\frac{1}{\rho} = ax + by + c,$$

ou en regardant l'équation de son axe comme représentée, après la flexion, par la formule intégrale (16), disposer des trois indéterminées a, b, c pour qu'en trois points de cette partie, savoir, aux deux extrémités et au milieu, le trinôme $ax + by + c$ ait bien la valeur qu'il doit avoir d'après l'équation (2) comparée à l'équation (1), c'est-à-dire qu'il soit égal *au quotient des moments des forces par* $E\mu$, *augmenté de l'inverse* $\frac{1}{r}$ *du rayon de courbure primitif en chaque point.*

De cette manière, la courbure nouvelle $\frac{1}{\rho}$ sera ce qu'elle doit être à ces trois points (sauf ce qui résulte d'une différence insensible sur le moment des forces), et, dans tout le reste de chaque partie, elle aura une valeur extrêmement approchée de sa valeur véritable, puisque celle-ci varie d'une manière continue et qu'il en est de même de la fonction du premier degré $ax + by + c$ des coordonnées nouvelles.

On conçoit que l'on pourrait représenter aussi cette quantité par un polynôme d'un degré supérieur au premier, et composé de manière que la transformation des coordonnées du n° **3** puisse le réduire à ne contenir qu'une seule des deux coordonnées nouvelles : de cette manière on pourrait poser la condition d'égalité en plus de trois points de chaque partie, puisqu'on aurait plus de trois coefficients à déterminer. Mais on pense que le trinôme $ax + by + c$ donnera des approximations suffisantes, que l'on peut d'ailleurs rendre aussi grandes qu'on veut, et dont on peut même apprécier le degré jusqu'à un certain point, en comparant les résultats d'une subdivision de la verge à ceux d'une subdivision plus grande.

L'emploi des formules de l'art. **6** suffira donc, on le croit, pour les besoins de la pratique dans le cas général, comme dans le cas particulier par lequel nous avons commencé.

MÉMOIRE

SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. A. CAYLEY (DE CAMBRIDGE).

Considérons d'abord la surface du troisième ordre qui passe par les six arêtes d'un tétraèdre quelconque. Cette surface sera touchée selon chaque arête par un seul plan; je dis que : « les plans tangents selon » les arêtes opposées, se rencontrent en trois droites, qui sont dans » le même plan, et que chacune de ces droites est située entièrement » sur la surface. »

En effet, si nous représentons par $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, les équations des quatre plans du tétraèdre, et par α, β, γ, δ des constantes arbitraires, l'équation de la surface ne peut avoir que la forme

$$\alpha QRS + \beta PRS + \gamma PQS + \delta PQR = 0.$$

Soient $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ ce que deviennent les quantités P, Q, R, S, quand on change les coordonnées x, y, z en de nouvelles variables ξ, η, ζ; l'équation du plan tangent se réduit facilement à la forme

$$(\mathfrak{P} - P)(\beta RS + \gamma QS + \delta QR) + (\mathfrak{Q} - Q)(\alpha RS + \gamma PS + \delta PR)$$
$$+ (\mathfrak{R} - R)(\alpha QS + \beta PS + \delta PQ) + (\mathfrak{S} - S)(\alpha QR + \beta PR + \gamma PQ) = 0.$$

Soient $P = 0$, $Q = 0$; cette équation devient

$$\beta\mathfrak{P} + \alpha\mathfrak{Q} = 0;$$

et de même, si $R = 0$, $S = 0$, l'équation devient

$$\delta\mathfrak{R} + \gamma\mathfrak{S} = 0.$$

De ces équations on déduit les deux suivantes :

$$\alpha\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{S} + \beta\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{S} + \gamma\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{S} + \delta\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha}\mathfrak{P} + \frac{1}{\beta}\mathfrak{Q} + \frac{1}{\gamma}\mathfrak{R} + \frac{1}{\delta}\mathfrak{S} = 0.$$

On conclut de la première, que la droite d'intersection des deux plans tangents est située sur la surface; et de la seconde, que cette droite est dans un même plan, quelles que soient les deux arêtes opposées par lesquelles on a mené les deux plans tangents. Ainsi le théorème est démontré.

En considérant une section quelconque de cette surface, ou même en supposant que P, Q, R, S ne contiennent que deux variables x, y, nous avons ce théorème :

« Étant donnée une courbe du troisième ordre qui passe par les » six points d'intersection de quatre droites, les tangentes à la courbe » en ces six points se rencontrent deux à deux en trois points qui » sont les points d'intersection de la courbe par une droite. Les tan- » gentes qui doivent être prises ensemble sont les tangentes en deux » points A, A′, tels que A est l'intersection de deux des quatre lignes » données, et A′ l'intersection des deux autres lignes, points que l'on » peut nommer *opposés*.

» De même, si une courbe du troisième ordre passe par cinq de ces » points, de telle manière que l'intersection des tangentes à la courbe » en deux points opposés soit située sur la courbe, la courbe passe » par le sixième point, et par les points d'intersection des tan- » gentes menées par les deux autres paires de points opposés. »

A présent, posons une courbe quelconque du troisième ordre et deux points A, A′ sur la courbe, tels que les tangentes en ces deux points se rencontrent sur la courbe (cela suppose que la courbe est de la sixième ou quatrième classe, et non pas de la troisième). Un autre point B sur la courbe, étant pris à volonté, les droites AB, A′B rencontrent la courbe en H et h; et les droites Ah, A′H se rencontrent en un point B′ situé sur la courbe. Les tangentes en B, B′, et de même les tangentes en H, h se rencontrent sur la courbe en deux points qui sont en ligne droite avec le point d'intersection des tangentes en A et A′.

On peut dire que les deux points B, B′, ou les deux points H, h, sont une paire de points correspondante à la paire A, A′. Les deux paires B, B′ et H, h, sont évidemment correspondantes l'une à l'autre, et, de plus, A, A′ correspond à ces deux paires, de la même manière que H, h correspond à A, A′, et B, B′; de sorte que l'on peut dire que

les trois paires A, A′; B, B′; H, h sont supplémentaires l'une aux deux autres.

Soit C, C′ une autre paire de points correspondante à A, A′; je dis que B, B′ *et* C, C′ *sont des paires correspondantes l'une à l'autre;* et, de plus, *si d'un point* P *quelconque de la courbe, l'on mène des lignes aux points* A, A′, B, B′, C, C′, *ces lignes forment un faisceau en involution.*

En effet, considérons six points quelconques A, A′, B, B′, C, C′ dans le même plan, et représentons par f, g, h les points d'intersection de BC′ et B′C, CA′ et C′A, AB′ et A′B, et par F, G, H les points d'intersection de CB et C′B′, CA et C′A′, AB et A′B′. Nous allons faire voir que le lieu d'un point P qui se meut de telle manière que les lignes menées aux points A, B, C, A′, B′, C′ forment toujours un faisceau en involution, est une courbe du troisième ordre qui passe par ces six points, et aussi par les points f, g, h, F, G, H.

Soient α, α', β, β', γ, γ' les tangentes trigonométriques des inclinaisons des lignes PA, PA′, PB, PB′, PC, PC′, sur une ligne fixe quelconque que l'on peut prendre pour l'axe des x. Pour que ces lignes forment un faisceau en involution, nous devrions avoir la relation

$$\alpha\alpha'(\beta+\beta'-\gamma-\gamma')+\beta\beta'(\gamma+\gamma'-\alpha-\alpha')+\gamma\gamma'(\alpha+\alpha'-\beta-\beta')=0,$$

ou, ce qui revient à la même chose, l'une quelconque des quatre équations

$$(\alpha-\beta')(\beta-\gamma')(\gamma-\alpha')+(\alpha'-\beta)(\beta'-\gamma)(\gamma'-\alpha)=0,$$
$$(\alpha'-\beta')(\beta-\gamma')(\gamma-\alpha')+(\alpha-\beta)(\beta'-\gamma)(\gamma'-\alpha')=0,$$
$$(\alpha'-\beta)(\beta'-\gamma')(\gamma-\alpha')+(\alpha'-\beta')(\beta-\gamma)(\gamma'-\alpha)=0,$$
$$(\alpha'-\beta)(\beta'-\gamma')(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta')(\beta-\gamma)(\gamma'-\alpha')=0.$$

Soient x_P, y_P, x_A, y_A, etc., les coordonnées de P, A,

$$\alpha=\frac{y_P-y_A}{x_P-y_A},$$

$$\alpha-\beta'=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}-\frac{y_P-y_{B'}}{x_P-x_{B'}}=-\frac{1}{x_P-x_A\;x_P-x_{B'}}(PAB'),$$

en représentant par (PAB′), etc., les quantités telles que

$$x_P(y_A-y_{B'})+y_P(x_A-x_{B'})+x_Ay_{B'}-x_{B'}y_A.$$

L'équation de la courbe peut donc se mettre sous l'une quelconque des quatre formes

$$PAB'.PBC'.PCA' + PA'B.PB'C.PC'A = 0,$$
$$PA'B'.PBC'.PCA + PAB.PB'C.PC'A' = 0,$$
$$PAB.PB'C'.PCA' + PA'B'.PBC.PC'A = 0,$$
$$PA'B.PB'C'.PCA + PAB'.PBC.PC'A' = 0,$$

qui sont du troisième ordre. La première fait voir que la courbe cherchée passe par les neuf points A, B, C, A′, B′, C′, f, g, h. La troisième ou la quatrième fait voir qu'elle passe de plus par le point F; la quatrième ou la seconde, qu'elle passe par le point G; la seconde ou la troisième, qu'elle passe par le point H. Ainsi la courbe passe par les douze points A, B, C, A′, B′, C′, f, g, h, F, G, H.

On peut remarquer qu'une courbe du troisième ordre qui passe par dix quelconques de ces points, ou même par neuf quelconques, pourvu que nous exceptions les combinaisons de A, B, C, A′, B′, C′, avec f, g, h, ou f, G, H, ou F, g, H, ou F, G, h, ne peut être que la courbe que nous venons de trouver. On peut aussi remarquer en passant que si A, A′, B, B′, C, C′ sont les points d'intersection de quatre droites, l'équation ci-devant trouvée est satisfaite identiquement, de sorte que la position du point P est absolument arbitraire. Cela étant connu, je ne m'arrête pas pour le démontrer.

Revenons au cas d'une courbe donnée, avec trois paires de points A, A′, B, B′, C, C′, comme auparavant, tels que B, B′ et C, C′ sont des paires correspondantes à A, A′. Les points A, B, C, A′, B′, C′, G, g, H, h sont situés sur la courbe; ainsi F, f sont aussi sur la courbe (c'est-à-dire que B, B′ et C, C′ sont des paires correspondantes), et les lignes menées par un point P quelconque de la courbe et les points A, B, C, A′, B′, C′ forment un faisceau en involution : théorème ci-devant énoncé.

Considérons une courbe du troisième ordre, de la quatrième classe (c'est-à-dire, telle que d'un point quelconque on ne peut lui mener que quatre tangentes). D'un point sur la courbe, indépendamment de la tangente en ce point, on ne peut mener que deux tangentes. Prenons les deux points K, L sur la courbe, et menons les tangentes KA, KA′, LB, LB′ touchant la courbe en A, A′, B, B′. Il est clair qu'en ce cas

A, A′ et B, B′ sont des paires correspondantes de points. Mais le cas général où la courbe est de la sixième classe est moins simple. Considérons, en effet, pour une telle courbe, les huit points A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 de contact des tangentes menées par les deux points K et L. En choisissant A, A′ et B de quelque manière que ce soit, parmi les points A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 respectivement, le point B′, qui doit entrer dans cette dernière série, ne peut pas être choisi à volonté, mais est parfaitement déterminé. En désignant convenablement les points B, on peut toujours supposer que les paires correspondantes soient A_1A_2 ou A_3A_4 avec B_1B_2 ou B_3B_4; A_1A_3 ou A_2A_4 avec B_1B_3 ou B_2B_4; A_1A_4 ou A_2A_3 avec B_1B_4 ou B_2B_3. Cela suppose que

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ A_4B_4;\quad A_1B_2,\ A_2B_1,\ A_3B_4,\ A_4B_3;$$
$$A_1B_3,\ A_3B_1,\ A_2B_4,\ A_4B_2;\quad A_2B_4,\ A_4B_1,\ A_2B_3,\ A_3B_2.$$

se rencontrent, chaque système, dans le même point. Il faut expliquer avec plus d'évidence la corrélation de ces huit points.

Imaginons les six points A, A′; B, B′; C, C′, tels que AA′, BB′, CC′ se rencontrent dans le même point. Formons, comme auparavant, le système de points f, g, h, F, G, H. Les propriétés de ce système de douze points sont très-nombreuses. Non-seulement F, G, H; F, g, h; f, G, h; f, g, H sont en ligne droite; mais, en outre, les trois droites de chacun des onze systèmes que voici se rencontrent dans le même point :

$$\begin{array}{lll} Af,\ Bg,\ Ch; & A'f,\ B'g,\ C'h; & \\ AA',\ Gg,\ Hh; & BB',\ Hh,\ Ff; & CC',\ Ff,\ Gg; \\ A'f,\ BG,\ CH; & B'g,\ CH,\ AF; & C'h,\ AF,\ BG; \\ Af,\ B'G,\ C'H; & Bg.\ C'H,\ A'F; & Ch,\ A'F,\ B'G. \end{array}$$

Cela est connu, je crois; au reste, pour le démontrer, considérons un parallélipipède, tel que gf, GF, AB, A′B′ en soient quatre arêtes parallèles, les autres arêtes parallèles étant gA, A′G, fB, B′F; gA', A′G, Bf, B′F. Soient H le point de rencontre, à l'infini, du premier système d'arêtes parallèles; C′ et C les points de rencontre, à l'infini, des arêtes des second et troisième systèmes respectivement; h le point de rencontre des quatre diagonales du parallélipipède; faisons la perspective de ce système, désignant chaque point de la projection

par la même lettre : l'on voit sans peine que la figure plane, ainsi obtenue, a les propriétés en question.)

A présent, en examinant la figure, on voit qu'il est permis de prendre pour A_1, A_2, A_3, A_4 les points A, A′, F, f, et pour B_1, B_2, B_3, B_4 les points B, B′, G, g, pour que les systèmes A_1, A_2, A_3, A_4 ; B_1, B_2, B_3, B_4 aient la corrélation ci-devant trouvée. Le système C, C′, H, h est supplémentaire à ces deux-ci.

Toutes les propriétés que je viens de trouver sont telles qu'il y a à chacune une propriété correspondante que l'on peut obtenir par la théorie des polaires réciproques. Nous avons ainsi des propriétés non moins intéressantes des courbes de la troisième classe et du sixième ou quatrième ordre.

En prenant pour la courbe du troisième ordre l'ensemble d'une section conique et d'une droite, pour que les tangentes en A, A′ se rencontrent sur la courbe, il faut que A, A′ soient situées sur la section conique de telle manière que AA′ passe par le pôle de la droite à l'égard de la conique. Alors B, B′; C, C′ étant pris de la même manière, BC′, B′C et BC, B′C′ se rencontrent sur la droite.

Les lignes tirées d'un point P quelconque de la conique, ou de la droite à A, B, C; A′, B′, C′, forment un faisceau en involution.

Le premier théorème et la première partie du second sont très-bien connus ; je ne sais s'il en est de même de la dernière partie de ce théorème.

ADDITION.

La droite PP′, *menée par deux points* P, P′ *d'une courbe du troisième ordre, qui correspondent toujours à une paire correspondante donnée de points* A, A′, *est toujours tangente à une certaine courbe de la troisième classe.*

Pour démontrer ce théorème, imaginons une paire fixe B, B′ de points qui corresponde à la paire donnée A, A′. Soient $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ les équations des lignes qui joignent A, A′ avec B, B′; l'équation de la courbe donnée du troisième ordre peut se mettre sous

la forme

$$(1)\qquad \frac{\alpha}{P}+\frac{\beta}{Q}+\frac{\gamma}{R}+\frac{\delta}{S}=0.$$

On peut toujours supposer, sans perte de généralité, que l'équation

$$(2)\qquad P+Q+R+S=0$$

soit identiquement vraie, car chaque équation de la forme $P=0$ peut être censée contenir une constante arbitraire qui en multiplie tous les termes.

Donc, en faisant

$$P+R=\theta,\qquad P=\theta-R,$$

on peut toujours supposer

$$Q+S=-\theta,\quad Q=-\theta-S,$$

et l'équation de la courbe se transforme en

$$(3)\qquad \frac{\alpha}{\theta-R}-\frac{\beta}{\theta+S}+\frac{\gamma}{R}+\frac{\delta}{S}=0,$$

ce que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$(4)\qquad \frac{\theta+(\lambda\mu+\lambda+\mu)S}{(\theta+\lambda R)(\theta+\mu R)}+\frac{-\theta+(\nu\rho+\nu+\rho)R}{(-\theta+\nu S)(-\theta+\rho S)}=0.$$

en déterminant convenablement les constantes λ, μ, ν, ρ. En effet, en réduisant, les deux équations deviennent identiques au moyen des quatre conditions

$$(5)\qquad \begin{cases} \delta=-k\lambda\mu, \quad \gamma=-k\nu\rho. \\ \delta-\beta=k\lambda\mu(\nu\rho+\nu+\rho), \\ \gamma-\alpha=k\nu\rho(\lambda\mu+\lambda+\mu). \end{cases}$$

où k est une quantité arbitraire, de manière que des quantités λ, μ, ν, ρ, il y en a une seule qui peut être prise à volonté.

De l'équation (4) l'on déduit tout de suite cette autre forme

$$(6)\qquad \frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{\mu(\lambda+1)}{\theta+\lambda R}-\frac{\lambda(\mu+1)}{\theta+\mu R}\right]+\frac{1}{\rho-\nu}\left[\frac{\rho(\nu+1)}{-\theta+\nu S}-\frac{\nu(\rho+1)}{-\theta+\rho S}\right]=0;$$

et de là, nous voyons que les points donnés par les deux systèmes

d'équations

$$(7)\qquad \begin{cases} (\theta + \lambda R = 0, & -\theta + \nu S = 0), \\ (\theta + \mu R = 0, & -\theta + \rho S = 0), \end{cases}$$

correspondent toujours l'un à l'autre et aux points donnés par les deux systèmes

$$(8)\qquad \begin{cases} (\theta = 0, & R = 0), \\ (\theta = 0, & S = 0), \end{cases}$$

c'est-à-dire aux points A, A'.

On trouve assez facilement pour l'équation de la droite menée par les points déterminés par les deux systèmes (7), points que l'on peut prendre pour P et P',

$$(9)\qquad (\mu\nu - \rho\lambda)\theta + \lambda\mu(\nu - \rho)R + \nu\rho(\lambda - \mu)S = 0,$$

ou

$$(10)\qquad C\theta + AR + BS = 0,$$

en faisant

$$(11)\qquad \begin{cases} pC = \mu\nu - \rho\lambda, \\ pA = \lambda\mu(\nu - \rho), \\ pB = \nu\rho(\lambda - \mu). \end{cases}$$

Éliminons des équations (5) et (11) les cinq quantités λ, μ, ν, ρ, p. Pour opérer de la manière la plus élégante, formons d'abord les équations identiques

$$(12)\qquad \begin{cases} [\mu\nu - \rho\lambda - \nu\rho(\lambda - \mu)](\nu - \rho)(\lambda\mu + \lambda + \mu) \\ + [\mu\nu - \rho\lambda + \lambda\mu(\nu - \rho)](\lambda - \mu)(\nu\rho + \nu + \rho) \\ = (\nu\lambda - \mu\rho)[\lambda\mu(\nu - \rho) - \nu\rho(\lambda - \mu) + 2(\mu\nu - \rho\lambda)], \\ \lambda\mu(\nu - \rho)^2 - \nu\rho(\lambda - \mu)^2 = (\mu\nu - \rho\lambda).(\lambda\nu - \mu\rho), \end{cases}$$

ce qui donne

$$(13)\qquad \begin{cases} A.(C - B)(\gamma - \alpha) + B.(C + A)(\delta - \varepsilon) \\ = \frac{k}{p}\lambda\mu\nu\rho.(\nu\lambda - \mu\rho)(2C + A - B), \\ A^2\gamma - B^2\delta = -\frac{k}{p}\lambda\mu\nu\rho.(\nu\lambda - \mu\rho)C. \end{cases}$$

et de là

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} C.[A.(C-B)(\gamma-\alpha)+B.(C+A)(\delta-\beta)] \\ \qquad\qquad +(2C+A-B)(A^2\gamma-B^2\delta) \end{array}\right\} = 0.$$

ou, toute réduction faite,

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} A(A+C)(A+C-B\gamma)+B.(C-B)(A+B-C\delta) \\ \qquad\qquad -AC.(C-B\alpha)-BC(C+A\beta) \end{array}\right\} = 0;$$

et puisque cette équation est du troisième ordre à l'égard des quantités A, B, C, il est évident que la ligne donnée par l'équation (10) est toujours tangente à une certaine courbe de la troisième classe. En supposant $\gamma = 0$, $\delta = 0$, ce qui réduit la courbe du troisième ordre aux lignes $R = 0$, $S = 0$, $(\beta - \alpha)\theta - \beta R - \alpha S = 0$, l'équation (15) se partage dans les deux équations

$$(16)\qquad C = 0,\quad A(C-B)\alpha + B(C+A)\beta = 0,$$

et la courbe de la troisième classe se réduit au point ($R = 0$, $S = 0$) et à une conique. Cela est un théorème connu, car l'on sait bien que si A, A′, sont des points quelconques sur deux droites données α, α', et B, B′ deux autres points déterminés, sur ces droites, de manière que l'intersection des lignes AB′, A′B soit toujours sur une ligne droite donnée, les deux lignes α, α' sont divisées homographiquement, B, B′ étant deux points correspondants; et de plus, que la ligne qui unit les points correspondants de deux lignes divisées homographiquement, est toujours tangente à une certaine conique. Quant au point d'intersection des lignes α, α', que nous venons de trouver, comme formant avec la conique une courbe de la troisième classe, on observera que, dans notre théorie, non-seulement les points des lignes α, α' se correspondent, mais que le point d'intersection des lignes α, α' correspond à tous les points de la troisième droite. La conique touche les deux droites α, α'; cela n'a pas, je crois, d'analogie dans la théorie générale.

Sur une équation différentielle à indices fractionnaires;

PAR M. BESGE.

Soient m, n, p, q des fonctions de x, et

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}y}{dx^{\frac{3}{2}}} + m\frac{dy}{dx} + n\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + py = q$$

l'équation proposée. Si l'on a

$$\frac{dm}{dx} + mn - p = 0,$$

on pourra ramener cette équation à la suivante

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + my = z,$$

ou z désigne l'intégrale de

$$\frac{dz}{dx} + nz = q,$$

et qui s'integre dans un grand nombre de cas, par exemple si m est une constante ou une fonction linéaire de x.

NOTE

Sur quelques nouveaux caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, situées entre des limites données;

PAR R. LOBATTO,
Professeur de Mathématiques à l'Académie royale de Delft.

L'illustre auteur de l'*Analyse des équations déterminées* a déduit directement, à l'aide de considérations géométriques, une règle bien simple pour juger de la nature de deux racines d'une équation, comprises entre les limites données α et β. Cette règle, qui sans doute aurait été moins facile à découvrir par la seule analyse, suppose, comme l'on sait, que l'équation proposée

$$f(x) = 0$$

n'ait que deux racines entre $x = \alpha$ et $x = \beta$; que l'équation

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad f'(x) = 0$$

ait une seule racine, et que celle

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f''(x) = 0$$

n'en présente aucune dans le même intervalle (α, β); ce qui revient à supposer que l'arc de courbe représenté par l'équation

$$y = f(x),$$

et limité par les ordonnées qui correspondent aux abscisses α et β, n'ait aucun point d'inflexion, mais seulement un point où la tangente devient parallèle à l'axe des x, et dont l'ordonnée acquiert par con-

séquent une valeur maximum ou minimum. (Voyez *Pl. II, fig.* 1, 2, 3, 4.)

Soient PM, P_1M_1 (*fig.* 1, 2) deux ordonnées représentées par $f(\alpha)$, $f(\beta)$; Mt, M_1t_1 les sous-tangentes des points P, P_1 de la courbe, ayant pour valeurs numériques $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$. Il est évident que cet arc de courbe ne pourra être coupé par l'axe des x en deux points a, a_1, ou, en d'autres termes, que l'équation

$$f(x) = 0$$

ne pourra avoir deux racines réelles entre α et β, à moins que ces limites ne satisfassent à l'inégalité

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} < \beta - \alpha,$$

abstraction faite des signes; d'où l'on est en droit de conclure, que si l'équation

$$f(x) = 0$$

donne, au contraire,

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha,$$

ce sera un indice certain de l'imaginarité des deux racines indiquées dans l'intervalle (α, β). Cette circonstance est d'ailleurs confirmée géométriquement dans les *fig.* 3, 4, où la somme des sous-tangentes M_1t_1, M_2t_2 surpasse la différence M_1M_2 des deux abscisses.

Tel est le caractère indiqué par Fourier pour s'assurer que deux racines manquent entre les limites α et β, lorsque les deux suites

$$(\alpha) \qquad f^{m}(\alpha)\, f^{m-1}(\alpha) \ldots f'''(\alpha)\, f''(\alpha)\, f'(\alpha)\, f(\alpha),$$
$$(\beta) \qquad f^{m}(\beta)\, f^{m-1}(\beta) \ldots f'''(\beta)\, f''(\beta)\, f'(\beta)\, f(\beta),$$

offrent une perte de deux variations, pourvu qu'en omettant les deux derniers termes, ces suites présentent le même nombre de variations. On sait d'ailleurs que les termes de chaque suite ont un rapport déterminé avec les coefficients des équations transformées en $(x - \alpha)$ et $(x - \beta)$, de sorte qu'on peut se servir également de ces coefficients dans l'examen dont il s'agit.

Quelque simple que soit l'application numérique de la règle due au susdit géomètre, il faut convenir cependant que cet avantage diminue beaucoup par la nécessité où l'on se trouve très-souvent de remplacer successivement les deux limites α, β par deux autres plus rapprochées, et de calculer en conséquence les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ relatives à ces nouvelles limites. En effet, puisque l'inégalité

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} < \beta - \alpha$$

exprime seulement une *condition* et non pas un *caractère exclusif* pour la réalité des deux racines situées entre α et β, il peut arriver que l'inégalité précédente soit vérifiée même dans le cas de deux racines imaginaires, ainsi que l'indiquent les *fig.* 3, 4, où la somme des sous-tangentes aux points P, P_3 reste inférieure à la différence des deux abscisses. Cette circonstance tient, comme l'on voit, à ce que les limites α, β ne sont pas encore assez voisines pour vérifier la règle en question, et c'est alors qu'il devient nécessaire d'y soumettre une ou plusieurs limites intermédiaires, jusqu'à ce que l'on soit assuré de l'imaginarité des deux racines, ou de leur réalité dans le cas d'un changement de signe dans la valeur de $f(x)$.

L'objet principal de la présente Note est de faire voir qu'en s'appuyant sur les principes établis par Fourier même, on peut parvenir à d'autres caractères propres à s'assurer plus promptement de l'imaginarité des racines comprises dans l'intervalle (α, β), et l'on doit s'étonner, en effet, qu'ils aient pu échapper au géomètre à qui l'analyse des équations est redevable de tant de belles et profondes recherches.

Considérons, à cet effet, un point intermédiaire p_1 (*fig.* 5) peu éloigné du point p où la tangente est parallèle à l'axe des x. Nommons $\alpha + \delta$ l'abscisse Om_1 du point p_1, qui représentera alors une valeur approchée de la racine α' de l'équation

$$f'(x) = 0.$$

Cette valeur sera $>$ ou $< \alpha'$, selon que p_1 sera pris à droite ou à gauche de p. Or, l'inspection de la figure indique de suite que si, dans le premier cas, les points P et p_1 sont assez voisins pour que la sous-tangente Mt égale ou surpasse la distance $Mm_1 = \delta$, il en résultera pour carac-

tere d'imaginarité des racines

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \delta;$$

et si, dans le second cas, la sous-tangente M_1t_1 égale ou surpasse la distance M_1m_1, on aura, pour second caractère semblable,

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha - \delta,$$

ou bien

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \delta = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

Quant à la valeur de δ, on peut la déduire des formules données par l'approximation newtonienne ou linéaire, et discutées avec soin par Fourier, dans le livre de son ouvrage cité.

Il résulte d'abord de cette discussion que les formules

$$\alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \beta - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

expriment deux valeurs approchées de la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

comprise entre α et β, mais qui seront chacune trop fortes ou trop faibles, selon que $f'(x)$ et $f''(x)$ se trouveront affectées de signes contraires ou de mêmes signes.

Admettons d'abord le premier cas. Il viendra alors pour δ les deux valeurs

$$\delta = -\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \delta = \beta - \alpha - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

d'où résultent les caractères d'imaginarité

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \dfrac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \\ \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \beta - \alpha - \dfrac{f'(\beta)}{f''(\beta)}; \end{cases}$$

ou bien

$$(2) \quad \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

abstraction faite des signes. Dans le second cas, on obtiendra de la même manière

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \dfrac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)} = \text{ou} > \beta - \alpha, \\ \dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \beta - \alpha - \dfrac{f'(\beta)}{f''(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha, \end{cases}$$

ou bien

$$(4)\qquad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)}.$$

Voilà donc quatre nouveaux caractères qui pourront servir d'auxiliaires à celui de Fourier, toutes les fois qu'on ne pourra distinguer par ce dernier la nature des racines sans recourir à des limites intermédiaires.

On remarquera que (1) et (2) ne diffèrent de (3) et (4) que par le changement de α en β; on pourrait donc se borner aux deux premiers, en ayant soin d'y remplacer la première limite par la seconde [*].

Mais on peut obtenir encore d'autres caractères semblables aux précédents. Observons, à cet effet, ainsi qu'il a été prouvé par Fourier, que si les valeurs approchées

$$\alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \beta - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

sont trop fortes, celles-ci

$$\alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\beta)}, \quad \beta - \frac{f'(\beta)}{f''(\alpha)},$$

seront au contraire trop faibles, et réciproquement. Donc, en raisonnant comme ci-dessus, on trouvera encore, par une simple permuta-

[*] Je dois avertir ici que les caractères (1), (4) ont déjà été indiqués par moi dans un Mémoire ayant pour titre : *Recherches sur la distinction des racines réelles et imaginaires dans les équations numériques, etc.*, et publié à la Haye en 1843. Mais les considérations géométriques qui m'ont guidé dans ces recherches sont moins simples que celles dont je me suis servi maintenant, et ne m'ont pu conduire, en outre, aux autres caractères exposés dans la présente Note.

tion des fonctions $f''(\alpha)$, $f''(\beta)$,

$$(5)\qquad \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \frac{f'(\alpha)}{f''(\beta)},$$

$$(6)\qquad \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f'(\beta)}{f''(\alpha)} = \text{ou} > \beta - \alpha,$$

$$(7)\qquad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \frac{f'(\alpha)}{f''(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha,$$

$$(8)\qquad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \frac{f'(\beta)}{f''(\alpha)}.$$

L'approximation linéaire conduit de plus à la formule

$$\beta - \frac{(\beta-\alpha)f(\beta)}{f'(\beta)-f'(\alpha)},$$

d'où l'on tire

$$\delta = -\frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)+f'(\alpha)},$$

abstraction faite des signes; cette valeur approchée étant trop grande ou trop petite, selon que les signes des fonctions $f'(\alpha)$, $f'''(\alpha)$ s'accordent ou non. Dans le premier cas, on sera assuré que les deux racines sont imaginaires lorsqu'on trouvera

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)+f'(\alpha)}.$$

ou bien

$$(9)\qquad \left[1 + \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}\right]\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \beta - \alpha;$$

et dans le second cas, lorsqu'on aura

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha - \delta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)}{f'(\beta)+f'(\alpha)},$$

ou bien

$$(10)\qquad \left[1 + \frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}\right]\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

En supposant $\beta - \alpha = 1$, ainsi que cela arrive le plus souvent, les deux derniers résultats se réduisent à ceux-ci

$$(9') \qquad 1 + \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)},$$

$$(10') \qquad 1 + \frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \frac{f'(\beta)}{f(\beta)}.$$

Nous venons ainsi de découvrir en tout cinq différents caractères d'imaginarité, et qui peuvent être appliqués soit à la première, soit à la seconde des limites α et β.

On pourrait penser au premier abord que le système (1), (2), (7), (8), (10) est seulement applicable au cas où les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$ diffèrent de signe à la première limite α, et le système (3), (4), (5), (6), (9) au cas contraire. Mais il faut observer qu'en changeant x en $-x$, la seconde limite β tiendra lieu de la première, attendu que la suite $(-\beta)$ ou la transformée en $-(x-\beta)$ offrira alors deux variations de plus que la suite $(-\alpha)$; et comme les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$ seront affectées de signes égaux pour $x = \pm\beta$, lorsqu'elles présentent deux signes différents pour $x = \pm\alpha$, il en résulte que le second système deviendra alors applicable à la limite β, et que l'on pourra, par conséquent, se servir indifféremment de l'un et de l'autre système de caractères.

N'oublions pas de faire remarquer encore que nos résultats étant fondés sur les formules de l'approximation linéaire, supposent nécessairement que chacune des fonctions $f''(x)$, $f'''(x)$ conserve son signe dans l'intervalle (α, β). Il faudra donc, avant de les appliquer, s'assurer, à l'aide des suites (α) et (β), ou du théorème de Budan, si cette condition est remplie.

Si la différence $\beta - \alpha$ ne surpasse pas l'unité, il arrivera rarement qu'il faille recourir à des limites intermédiaires, pour s'assurer de l'imaginarité des deux racines.

Si, au contraire, cette différence s'élève à un nombre m d'unités, et qu'aucun des caractères n'ait pu faire reconnaître la nature des racines, on prendra alors pour limites plus rapprochées deux nombres entiers α' et $\alpha' + 1$, comprenant une racine de l'équation

$$f'(x) = 0.$$

Je rapporterai maintenant quelques exemples propres à faire apprécier l'utilité des caractères auxiliaires, ci-dessus obtenus.

Considérons d'abord l'équation

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 18x + 5,5 = 0.$$

La transformée en $(x - 1)$ ayant pour coefficients

$$1 + 12 + 40 + 30 + 6,5,$$

il en résulte que deux racines sont indiquées entre 0 et 1; que l'équation

$$f'(x) = 0$$

n'a qu'une seule racine, et que l'équation

$$f''(x) = 0$$

n'en a aucune entre ces limites [*]. La proposée satisfait ainsi aux conditions exigées pour l'application de la règle de Fourier, et donne, à cet effet,

$$f(\alpha) = 5,5, \quad f'(\alpha) = -18, \quad f(\beta) = 6,5, \quad f'(\beta) = 30.$$

Or, puisqu'on a

$$\frac{5,5}{18} + \frac{6,5}{30} < 1.$$

On est encore incertain si les racines sont réelles ou imaginaires. Essayons donc une limite intermédiaire 0,5; il viendra, pour les coefficients de la transformée en $(x - 0.5)$,

$$1 + 10 + 23,5 - 1,5 + 0.0625,$$

d'où l'on voit que les racines devront être cherchées entre 0,5 et 1. La règle dont il s'agit est encore insuffisante pour juger de leur nature,

[*] Les coefficients d'une transformée en $(x - \alpha)$ s'obtiennent très-promptement à l'aide d'un algorithme de calcul dû au géomètre anglais Horner, que nous avons expliqué dans notre Mémoire cité, et qui comprend celui de Budan, comme un cas particulier.

attendu que

$$\frac{0,062}{1,5} + \frac{6,5}{30} < 0,5.$$

Il faudra ainsi recourir à une nouvelle limite intermédiaire, pour laquelle on prendra 0,7. Le calcul des coefficients de la transformée en $(x - 0,7)$ fournit les nombres

$$1 + 11,8 + 29,74 + 9,13 + 0,78;$$

d'où l'on conclura que les deux racines sont situées entre 0.5 et 0,7. Mais puisque

$$\frac{0,062}{1,5} + \frac{0,78}{9,13} < 0,2,$$

on reste encore dans l'incertitude, et l'on est obligé de recourir à une troisième limite intermédiaire 0,6, qui fournira les coefficients

$$1 + 10,4 + 26,56 + 3,50 + 0,157,$$

indiquant que les racines se trouvent entre 0,5 et 0.6. Mais leur nature reste encore indécise, puisque

$$\frac{0,06}{1,5} + \frac{0,157}{3,50} < 0.1.$$

Adoptons maintenant une quatrième limite 0,55. On obtiendra pour les coefficients de la transformée y relative

$$1 + 10,2 + 25,014 + 0,925 + 0,0475.$$

Les deux racines devront être cherchées entre 0,5 et 0,55; et puisque

$$\frac{0,0475}{0,925} > 0,05,$$

on est enfin assuré que les deux racines sont imaginaires.

On voit que l'équation précédente s'est trouvée dans des circonstances assez défavorables à l'application de la règle de Fourier, attendu qu'elle a exigé le calcul relatif à quatre limites intermédiaires, avant qu'on ait pu prononcer sur la nature des racines.

La fonction $f'''(x)$ conservant son signe entre 0 et 1, nous pouvons

essayer ici l'un des caractères auxiliaires. La proposée donne

$$\tfrac{1}{2}f''(\alpha) = 10, \quad \tfrac{1}{2}f''(\beta) = 40.$$

Les deux premiers seront trouvés insuffisants, à cause de

$$\frac{5,5}{18} < \frac{18}{20}, \quad \frac{5,5}{18} + \frac{6,5}{80} < 1.$$

Le troisième, au contraire, sera vérifié, car on a

$$\frac{6,5}{30} + \frac{18}{20} > 1.$$

On est donc déjà assuré de l'imaginarité des deux racines, sans qu'il faille recourir à quelque nouvelle limite intermédiaire.

Prenons pour second exemple l'équation

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 28x^2 - 81x + 53 = 0$$

On trouvera, pour les coefficients des transformées en $(x-1)$ et $(x-2)$,

$$1 + 6 + 40 - 15 + 3,$$
$$1 + 10 + 64 + 87 + 35.$$

Il s'agit de savoir si les deux racines indiquées entre les limites 1 et 2 sont réelles ou non. On a

$$f(\alpha) = 3, \quad f'(\alpha) = -15, \quad f''(\alpha) = 80,$$
$$f(\beta) = 35, \quad f'(\beta) = 87, \quad f''(\beta) = 128.$$

D'ailleurs les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ remplissent les conditions voulues. La règle de Fourier ne peut lever l'incertitude, à cause de l'inégalité

$$\frac{3}{15} + \frac{35}{87} < 1,$$

de sorte qu'il faudrait calculer les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ pour une limite intermédiaire. Mais, en essayant le caractère (1), on trouve de suite

$$\frac{1}{15} > \frac{15}{80},$$

d'où l'on est assuré que les deux racines sont imaginaires.

Soit encore l'équation

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 37x^2 - 36x + 15 = 0.$$

Les coefficients de la transformée en $(x - 1)$ étant

$$1 - 5 + 16 + 15 + 8,$$

il faudra chercher deux racines entre 0 et 1.

On a

$$f(\alpha) = 15, \quad f'(\alpha) = -36, \quad f''(\alpha) = 74,$$
$$f(\beta) = 8, \quad f'(\beta) = 15, \quad f''(\beta) = 32,$$
$$\frac{15}{36} + \frac{8}{15} < 1, \quad \text{indice incertain.}$$

En employant le caractère (3), on est de suite averti que les racines sont imaginaires, puisque

$$\frac{8}{15} + \frac{36}{74} > 1.$$

La même conclusion aurait pu être déduite du caractère (4), à cause de

$$\frac{8}{15} > \frac{15}{32}.$$

Examinons en dernier lieu l'équation

$$f(x) = x^6 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui donne, pour la transformée en $(x - 1)$, les coefficients

$$1 + 6 + 15 + 17 + 10 + 2,$$

indiquant que trois racines peuvent exister entre 0 et 1.

L'équation

$$f'(x) = 0$$

ayant deux racines dans le même intervalle, il faudra s'assurer si elles sont réelles ou non. Les deux séries des coefficients y relatives sont :

Pour l'équation en x,

$$5 + 4 + 3 - 4 + 2;$$

pour l'équation en $(x - 1)$,

$$5 + 24 + 45 + 34 + 10.$$

La règle de Fourier ne décide pas encore la nature de ces deux racines, puisqu'on trouve

$$\frac{2}{4} + \frac{10}{34} < 1.$$

Mais le caractère (5) donnant

$$\frac{2}{4} > \frac{4}{90},$$

il en résulte immédiatement que les équations

$$f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0$$

ont deux racines imaginaires.

Fourier n'a considéré que le cas où l'arc de courbe compris entre les limites $x = \alpha$ et $x = \beta$ n'offre aucun point d'inflexion, ce qui n'arrive pas toujours, car très-souvent les suites (α), (β) indiqueront que les équations

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0,$$

ont chacune une racine dans l'intervalle (α, β). Si alors les deux racines de la proposée sont imaginaires, la courbe affectera, à l'égard de l'axe des x, une des quatre formes représentées dans les *fig.* 6, 7, 8, 9, contenant en p un point d'inflexion.

Dans ce cas, la fonction $f(x)$ et ses trois dérivées prendront aux deux limites les signes indiqués au tableau suivant :

		$f(x)$.	$f'(x)$.	$f''(x)$.	$f'''(x)$.
Fig. 6,	$x = \alpha$,	+	—	+	—
	$x = \beta$,	+	+	—	—
Fig. 7,	$x = \alpha$,	+	—	—	+
	$x = \beta$,	+	+	+	+
Fig. 8,	$x = \alpha$,	—	+	—	+
	$x = \beta$,	—	—	+	+
Fig. 9,	$x = \alpha$,	—	+	+	—
	$x = \beta$,	—	—	—	—

Il en résulte, en supposant que $f'''(x)$ conserve son signe depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$, que la suite (α) offrira deux variations de plus que la suite (β).

La regle de Fourier devient évidemment inapplicable au cas actuel; mais voici comment on pourra y suppléer.

Soit encore $\alpha + \delta$ une valeur approchée de la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

mais supérieure à la valeur exacte. Les *fig.* 6 et 8 fourniront de même pour caractère d'imaginarité,

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \delta.$$

Si, au contraire, la valeur $\alpha + \delta$ est trop petite, les *fig.* 7 et 9 donneront le caractère

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha - \delta,$$

ou bien

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \delta = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

Dans le premier cas, la courbe représentée par l'équation

$$f'(x) = 0$$

prendra entre les deux limites données l'une des deux formes indiquées par les *fig.* 10 et 12. Les formules de l'approximation newtonienne ne pourront s'appliquer ici qu'à la première limite, à cause qu'il existe entre a et P un point p où la tangente devient parallèle à l'axe des x. Or la valeur approchée $\alpha + \delta$ étant alors trop petite, il faudra prendre pour δ la partie $Mr = \frac{(\beta - \alpha) f'(\alpha)}{f'(\alpha) + f'(\beta)}$ qui est supérieure à la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

ce qui fournira le caractère

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \frac{(\beta - \alpha) f'(\alpha)}{f'(\alpha) + f'(\beta)},$$

ou bien

$$\left[1 + \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}\right] \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

Dans le second cas, la courbe dont il s'agit affectera l'une des formes

représentées par les *fig.* 11 et 13; et l'on s'assure pareillement qu'il faudra se borner à la même valeur de δ, d'où il suit

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)}{f'(\alpha)+f'(\beta)},$$

ou bien

$$\left[1+\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}\right]\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \beta-\alpha.$$

Tels sont les deux caractères que l'on pourra appliquer au cas actuel, et qui coïncident avec les deux derniers (9) et (10), obtenus dans le cas précédent.

Prenons pour exemple l'équation

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 20x^3 + 3x^2 + 5x - 25 = 0.$$

Les coefficients de la transformée en $(x-1)$ seront

$$1 + 7 - 2 - 35 - 36 - 34.$$

Deux racines devront être cherchées entre 0 et 1. Le second caractère nous avertit de suite qu'elles sont imaginaires, puisqu'on a

$$1 + \frac{5}{36} > \frac{36}{34}.$$

Soit encore l'équation

$$f(x) = x^5 - 7x^4 - 16x^3 + 226x^2 - 571x + 448 = 0.$$

On aura pour les coefficients des transformées en $(x-2)$,

$$1 + 3 - 32 + 42 - 3 + 2;$$

pour les coefficients des transformées en $(x-3)$,

$$1 + 8 - 10 - 26 + 2 + 13.$$

On peut appliquer ici le premier caractère, puisque

$$1 + \frac{2}{3} > \frac{3}{2}.$$

Donc les deux racines indiquées entre 2 et 3 seront imaginaires.

Les applications précédentes suffisent pour éclaircir la théorie que nous venons d'exposer.

Lorsque les deux limites α et β ne sont pas encore assez rapprochées pour pouvoir en conclure l'imaginarité des racines, on prendra pour limite intermédiaire une valeur approchée α' de la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

à laquelle on joindra celle des deux limites données qui correspond à la partie convexe de la courbe, de manière que les nouvelles limites ne comprennent aucun point d'inflexion, ce qui ramène la recherche au cas précédemment traité. La figure de la courbe indique d'ailleurs si la nouvelle limite α' doit surpasser ou non la valeur exacte de la racine susdite.

Il peut arriver, en outre, que l'arc de courbe présente deux points où la tangente devient parallèle à l'axe des x. Cette circonstance sera indiquée par une différence de deux variations dans les suites (α), (β), après avoir omis les derniers termes. Dans ce cas, il faudra appliquer la recherche à l'équation

$$f'(x) = 0,$$

contenant deux racines entre α et β. S'il en résulte que ces racines sont imaginaires, il en sera de même des deux racines de la proposée situées entre les limites données. Si, au contraire, elles sont réelles, la valeur intermédiaire γ, qui les aura séparées, donnera lieu à une nouvelle transformée en $(x - \gamma)$, laquelle étant combinée avec celle en $(x - \alpha)$ ou $(x - \beta)$, fera rentrer la recherche dans le cas où les deux caractères (9), (10) deviennent applicables.

ADDITION

A la Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires [*]. — *Démonstration géométrique et directe des relations binômes;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Les binômes appelés quelquefois *déterminants*, dont les deux termes offrent, dans leur composition, une sorte de réciprocité et sont séparés par le signe —, se présentent fréquemment en géométrie et en mécanique : on les retrouve dans les expressions des moments et des aires, ainsi que dans les nombreuses formules exprimant les affections ou les propriétés des lignes courbes à double courbure, etc. Ils ont souvent pour origine, ou une résolution d'équations du premier degré à deux inconnues, ou une soustraction de deux fractions l'une de l'autre. Mais ils ont aussi une signification géométrique qu'il est utile de faire ressortir, et qui peut fournir des démonstrations très-directes des formules où ils entrent : c'est ce que nous allons faire voir sur celles de la Note citée.

[*] Insérée dans ce Journal, cahiers de juillet et d'août.

Si, au lieu de neuf quantités a, a', a'', b,..., on en a n^2, n étant un nombre quelconque, et si elles sont liées par $n + n\frac{n-1}{2}$ relations analogues aux six relations (1) de la page 270, il existe aussi, entre elles, $n + n\frac{n-1}{2} + n^2$ autres relations analogues à celles (2), (3), ainsi que M. Catalan l'a démontré d'une manière simple et générale. (Première partie d'un Mémoire inséré au tome XIV de ceux qui ont été couronnés par l'Académie de Bruxelles, 1840.) Sa méthode n'a rien de commun avec celle dont je me suis servi, parce qu'elle se fonde sur l'emploi d'indéterminées comme celles qui ont été introduites par Poisson (*Correspondance de l'École polytechnique*), et qui, comme on l'a dit à la Note, ne sont autre chose que les coordonnées entrant dans les démonstrations de Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II, IX, 6), et de Lacroix (*Calcul différentiel*, in-4°, chap. V).

Elles sont une conséquence de ce théorème de géométrie projective :

« Soit un triangle dans l'espace, et soient p, p' les projections de » deux de ses côtés sur une droite, q, q' leurs projections sur une » autre droite coupant à angle droit la première; la projection de son » aire sur le plan de ces deux droites sera $\pm \frac{1}{2}(pq' - qp')$, c'est-à- » dire la différence des aires de deux triangles dont chacun a pour » base la projection d'un des côtés du triangle donné sur une des » droites, et pour hauteur celle de l'autre côté sur l'autre droite. »

On peut déduire ce théorème, comme a fait M. Cauchy [*], de la formule du sinus de la différence de deux angles; car si m, m' sont les projections des deux côtés du triangle sur le plan, $\frac{p}{m}$, $\frac{p'}{m'}$ sont les cosinus et $\frac{q}{m}$, $\frac{q'}{m'}$ les sinus des angles de ces projections avec la première droite; d'où $\sin(\widehat{m'm}) = \pm\left(\frac{q'}{m'}\frac{p}{m} - \frac{q}{m}\frac{p'}{m'}\right)$, et l'aire du triangle projeté est $\frac{1}{2}m.m'\sin(\widehat{m'm}) = \pm(pq' - qp')$.

Mais on peut encore démontrer comme il suit, et sans invoquer aucune formule, ce théorème important qui, une fois admis en géométrie, dispense de beaucoup de redites et de beaucoup de calculs.

Supposons (ce qui ne change rien aux projections) que les deux droites rectangulaires passent par le point de concours o des projections om, om' des deux côtés du triangle sur le plan de ces droites. Les triangles qui ont pour sommet commun l'extrémité m' de la projection du deuxième côté, et pour bases les projections $op = p$, $oq = q$ du premier côté ou de om sur les deux droites, ont pour hauteurs respectives q' et p', distances de m' aux mêmes droites, en sorte que ce sont les deux triangles dont parle l'énoncé du théorème, ayant pour aires $\frac{1}{2}pq'$, $\frac{1}{2}qp'$. Il s'agit donc seulement de faire voir que le triangle projeté omm' est égal à leur différence : or cela se peut facilement de deux manières :

1°. Ces trois triangles $om'p$, $om'q$, $om'm$ ont un côté commun om' que l'on peut prendre pour leur base : les aires sont comme les hauteurs, c'est-à-dire comme les projections, sur une perpendiculaire à om', des trois côtés adjacents op, oq, om. Or celui-ci est la diagonale

[*] *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal*, 1826, page 12.

du rectangle formé sur les deux autres; sa projection, sur une perpendiculaire à om' qui est supposé passer dans l'angle qop, est égale à la différence des projections des deux autres. Donc

$$omm' = \pm\left(\tfrac{1}{2}p.q' - \tfrac{1}{2}q.p'\right).$$

2°. En traçant la figure, on reconnaît, si le point m' est plus distant que m des deux droites, que l'on a l'aire $omm' = om'p - (omp + pmm')$. Or les deux triangles entre parenthèse ont une base commune $mp = qo = q$. et deux hauteurs dont la somme est p'. Donc, comme $om'p = \frac{1}{2}pq'$, on a encore $omm' = \frac{1}{2}p.q' - \frac{1}{2}q.p'$. quantité qui ne fait que changer de signe si p', q' ont d'autres rapports avec p, q. C'est la démonstration élémentaire connue du théorème du moment de la résultante de deux forces autour d'un point situé dans leur angle. (*Poisson*, deuxième édition, n° 271.)

Revenons maintenant aux deux systèmes (ox, oy, oz) de droites rectangulaires et (ox_1, oy_1, oz_1 de droites obliques de la Note citée. Sur les deux droites obliques oy_1. oz_1 prenons, à partir du point de concours o. deux longueurs égales à l'unité : l'aire du triangle isocèle formé sur elles sera $\frac{1}{2}\sin y_1oz_1$; sa projection sur le plan yoz de deux des droites du système rectangulaire sera $A.\frac{1}{2}\sin y_1oz_1$, puisque A est le cosinus de l'angle des droites ox, ox' respectivement perpendiculaires aux plans yoz. y_1oz_1. Donc, comme les projections. sur oy, oz, de l'unité de longueur portée sur oy_1, oz_1 ne sont autre chose que les cosinus des angles formés par ces diverses droites. on aura, en vertu du théorème démontré,

$$\pm A\sin y_1oz_1 = \cos yoy_1\cos zoz_1 - \cos yoz_1\cos zoy_1 = b'c'' - c'b'',$$

ce qui est une des équations du n° 6 (page 274). On démontrerait de même les autres, et par là se trouvent aussi démontrées les neuf équations (3) du n° 1, puisqu'elles sont relatives au cas où les sinus des angles y_1oz_1, z_1oy_1, x_1oy_1 des droites du second système sont égaux à l'unité.

On voit ainsi que les binômes réciproques, qui forment les seconds membres de ces équations, peuvent être regardées comme représentant des différences d'aires triangulaires doublées.

MÉMOIRE

SUR L'ÉLIMINATION DES NOEUDS

DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. JACOBI [*].

Les illustres géomètres du siècle passé, en traitant le problème des trois corps, ont cherché le mouvement de deux d'entre eux autour du troisième ou autour du centre de gravité de tous les trois. Mais, en réduisant de cette manière le problème de trois corps qui s'attirent mutuellement à un problème de deux corps qui se meuvent autour d'un point fixe, on fait perdre aux équations différentielles du problème cette forme précieuse dont elles jouissent dans leur état primitif, savoir, que les secondes différentielles des coordonnées soient égalées aux dérivées d'une même fonction. C'est par cette raison que les principes de la conservation des forces vives et des aires cessent d'avoir lieu par rapport aux deux corps. On pourra cependant éviter cet inconvénient en agissant de la manière suivante :

Supposons, pour plus de généralité, que le système se compose de n corps, du Soleil et de $n-1$ planètes. Comme il est permis de supposer que son centre de gravité reste en repos, on aura une équation linéaire entre chacun des trois systèmes de coordonnées du même nom. Donc les n coordonnées parallèles à un même axe pourront être exprimées linéairement par $n-1$ autres quantités, en établissant $n-1$

[*] Cet article est extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 8 août 1842).

équations de condition entre les $n(n-1)$ constantes qui entrent dans ces n expressions linéaires. Comme on peut disposer encore d'un nombre $(n-1)^2$ de constantes, on les déterminera de manière que, dans l'expression de la force vive du système, s'évanouissent les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ produits des différentielles premières des nouvelles variables. En se servant de formules parfaitement semblables pour chaque système de coordonnées du même nom, et en considérant les nouvelles variables comme les coordonnées de $n-1$ autres corps, *on aura réduit de cette manière la force vive du système des n corps proposés à celle d'un système de $n-1$ corps*, des masses convenables étant attribuées à ces derniers. Il y aura même dans les formules de réduction un nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ de constantes arbitraires et dont on pourra profiter de différentes manières.

D'après ce qu'on vient de dire, le principe de la conservation des forces vives donnera une équation dans laquelle la somme des forces vives des $n-1$ corps fictifs sera égalée à une fonction de leurs coordonnées. En se servant des règles générales de Lagrange, on en déduira, par de simples différentiations partielles, les équations différentielles du problème réduit, et l'on reconnaîtra aisément que la conservation des aires a lieu dans le mouvement des $n-1$ corps par lesquels on a remplacé le système proposé. Ces $n-1$ corps ne s'écartent d'ailleurs des $n-1$ planètes que de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, de manière que la première approximation peut être la même pour les uns et pour les autres. Le changement que, dans cette analyse, doit subir l'expression de la force perturbatrice n'augmente pas la difficulté de son développement.

En appliquant la méthode que je viens d'exposer au problème des trois corps, on réduit celui-ci à un problème du mouvement de deux corps qui jouit de propriétés remarquables. En effet, les trois équations fournies par la conservation des aires font voir :

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps reste constamment dans un plan fixe : c'est le plan invariable du système ;

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et

les paramètres de ces orbites regardées comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Choisissons pour variables du problème les inclinaisons des deux orbites au plan invariable, les deux rayons vecteurs, les angles qu'ils forment avec l'intersection commune des plans des deux orbites, enfin l'angle que forme cette intersection située, comme on a vu, dans le plan invariable, avec une droite fixe de ce plan. On trouvera *que ce dernier angle disparaît entièrement du système des équations différentielles et se détermine après leur intégration par une quadrature*. Donc, dans cette nouvelle forme des équations différentielles n'entre aucune trace des nœuds. Les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, s'y trouvent réduites à cinq équations du premier ordre et une seule du second. Par suite, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. Je dis dans le système du monde, puisque la même méthode s'applique à un nombre quelconque de corps.

ANALYSE.

1. Soient m la masse du Soleil, m_1 et m_2 celles des deux planètes; soient ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées rectangulaires des trois corps m, m_1, m_2, rapportées à leur centre de gravité. Comme on a les trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases} m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0, \\ m\eta + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 = 0, \\ m\zeta + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 = 0. \end{cases}$$

il sera permis de faire

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \eta = \alpha y + \beta y_1, & \zeta = \alpha z + \beta z_1, \\ \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \eta_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, \\ \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, & \eta_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1. \end{cases}$$

les six constantes α, β, etc., devant satisfaire aux deux conditions

$$(3)\qquad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par les substitutions (2), la somme des forces vives du système 2T se change en cette expression

$$(4)\qquad \begin{cases} 2T = \mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ \quad + \mu_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{cases}$$

on aura les trois équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu = m\alpha\alpha + m_1\alpha_1\alpha_1 + m_2\alpha_2\alpha_2, \\ \mu_1 = m_1\beta_1\beta + m_1\beta_1\beta_1 + m_2\beta_2\beta_2, \\ 0 = m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2. \end{cases}$$

J'observe qu'en vertu des formules (3) on peut faire

$$(6)\qquad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \varepsilon.m, \quad \alpha_2\beta - \alpha\beta_2 = \varepsilon.m_1, \quad \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \varepsilon.m_2,$$

ε étant un facteur indéterminé. Des formules (5) et (6) on tire aussi celle-ci :

$$(7)\qquad \mu\mu_1 = mm_1m_2 + (m + m_1 + m_2)\,\varepsilon\varepsilon.$$

Si l'on fait

$$(8)\qquad \begin{cases} xx + yy + zz = rr, \\ x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = r_1r_1, \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1\cos V, \end{cases}$$

on aura

$$(9)\qquad \begin{cases} \rho\rho = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ \quad = \gamma^2 rr + 2\gamma\delta rr_1\cos V + \delta^2 r_1r_1, \\ \rho_1\rho_1 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \\ \quad = \gamma_1^2 rr + 2\gamma_1\delta_1 rr_1\cos V + \delta_1^2 r_1r_1, \\ \rho_2\rho_2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 \\ \quad = \gamma_2^2 rr + 2\gamma_2\delta_2 rr_1\cos V + \delta_2^2 r_1r_1, \end{cases}$$

où l'on a mis, pour plus de simplicité,

$$(10)\qquad \begin{cases} \gamma = \alpha_1 - \alpha_2, & \delta = \beta_1 - \beta_2, \\ \gamma_1 = \alpha_2 - \alpha, & \delta_1 = \beta_2 - \beta, \\ \gamma_2 = \alpha - \alpha_1, & \delta_2 = \beta - \beta_1. \end{cases}$$

ce qui donne

$$(11)\qquad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$U = \frac{m m_1}{\rho_2} + \frac{m m_2}{\rho_1} + \frac{m_1 m_2}{\rho} = \sum \frac{m_1 m_2}{\rho},$$

le principe des forces vives fournit l'équation

$$(12)\qquad T = U - h = \sum \frac{m_1 m_2}{\rho} - h,$$

h étant une constante arbitraire. Or, si dans cette équation l'on substitue les valeurs des quantités T, ρ, ρ_1, ρ_2 tirées des formules (4) et (9), on aura tout de suite, par les règles générales données par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*,

$$(13)\qquad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 x}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \gamma (\gamma x + \delta x_1)}{\rho^3} = \dfrac{dU}{dx}, \\ \mu \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \gamma (\gamma y + \delta y_1)}{\rho^3} = \dfrac{dU}{dy}, \\ \mu \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \gamma (\gamma z + \delta z_1)}{\rho^3} = \dfrac{dU}{dz}, \\ \mu_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \delta (\gamma x + \delta x_1)}{\rho^3} = \dfrac{dU}{dx_1}, \\ \mu_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \delta (\gamma y + \delta y_1)}{\rho^3} = \dfrac{dU}{dy_1}, \\ \mu_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \delta (\gamma z + \delta z_1)}{\rho^3} = \dfrac{dU}{dz_1}. \end{cases}$$

On tire de ces formules les suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= -\mu_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\\
&= -(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3},\\
\mu\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= -\mu_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)\\
&= -(zx_1-xz_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}.\\
\mu\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= -\mu_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)\\
&= -(xy_1-yx_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations donnent les trois intégrales

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\mu_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)=c,\\
&\mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\mu_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)=c_1,\\
&\mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\mu_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)=c_2,
\end{aligned}\right.$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires. Je remarque à cette occasion les formules

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mu\left(y_1\frac{d^2z}{dt^2}-z_1\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(yz_1+zy_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\gamma}{\rho^3}.\\
&\mu_1\left(y\frac{d^2z_1}{dt^2}-z\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)=-(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2\delta\delta}{\rho^3},
\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mu_1\mu_1\frac{d\left(y_1\frac{dz}{dt}-z_1\frac{dy}{dt}+y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}\right)}{dt}\\
&=(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2(\mu_1\gamma\gamma-\mu\delta\delta)}{\rho^3}.
\end{aligned}\right.$$

On a deux autres systèmes de formules semblables à celui des for-

mules (16) et (17), et qui se rapportent aux coordonnées z et x et aux coordonnées x et y.

D'après une propriété connue des fonctions homogènes, il suit des formules (13),

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mu\left(x\dfrac{d^2x}{dt^2} + y\dfrac{d^2y}{dt^2} + z\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) \\ + \mu_1\left(x_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + y_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} + z_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2}\right) \end{array} \right\} = -\mathrm{U}.$$

Donc, en faisant usage des formules (4) et (12), on obtient la suivante :

$$(19)\quad \frac{d^2(\mu rr + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2(\mathrm{U} - 2h).$$

Les six équations (13) pourront servir à déterminer les six quantités x, y, etc., en fonction du temps. Mais on pourra aussi choisir pour cet effet six autres équations indépendantes entre elles et qui se déduisent des équations (13) par des combinaisons différentes, par exemple, les quatre équations (12) et (15), une des équations (14) et l'équation (19). En effet, on reviendra sans peine de ces dernières aux équations (13).

On déterminera α, β, etc., par les quantités γ, δ, etc., au moyen des formules

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{M}\alpha = m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, & \mathrm{M}\beta = m_1\delta_2 - m_2\delta_1, \\ \mathrm{M}\alpha_1 = m_2\gamma - m\gamma_2, & \mathrm{M}\beta_1 = m_2\delta - m\delta_2, \\ \mathrm{M}\alpha_2 = m\gamma_1 - m_1\gamma, & \mathrm{M}\beta_2 = m\delta_1 - m_1\delta, \end{array} \right.$$

où

$$\mathrm{M} = m + m_1 + m_2.$$

Ces formules étant substituées dans l'équation (5), on aura

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M}\mu = m_1m_2\gamma\gamma + m_2m\gamma_1\gamma_1 + mm_1\gamma_2\gamma_2, \\ \mathrm{M}\mu_1 = m_1m_2\delta\delta + m_2m\delta_1\delta_1 + mm_1\delta_2\delta_2, \\ 0 = m_1m_2\gamma\delta + m_2m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2, \end{array} \right.$$

formules analogues aux équations (5).

2. Je veux discuter à présent la grandeur des différentes constantes qui entrent dans les formules précédentes. Ces constantes n'étant pas

entièrement déterminées, il s'agira de faire telles suppositions sur leur grandeur respective qui pourront subsister avec les équations de condition établies entre ces constantes et qui permettront en même temps de faire usage des méthodes d'approximation connues.

Les équations de condition que l'on a établies entre les constantes α, β, etc., sont les suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0, \\ m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 = 0; \end{cases}$$

celles que l'on a entre les six constantes γ, δ, etc., seront

$$(2)\quad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1 \delta_1 + m m_1 \gamma_2 \delta_2 = 0. \end{cases}$$

Les masses des planètes étant très-petites par rapport au Soleil, les fractions $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$ seront des quantités très-petites du premier ordre. Cela posé, les équations (1) font voir qu'il est permis de supposer α_1 et β_2 très-proches de l'unité, pendant que les constantes α, α_2, β, β_1 seront des quantités du premier ordre. En effet, si l'on fait

$$(3)\quad \alpha_2 = \frac{m_1\theta}{m}, \quad \beta_1 = \frac{m_2\lambda}{m},$$

on tirera des équations (1) les formules approchées

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha = -\frac{m_1}{m}, \quad \alpha_1 = 1, \quad 1 + \lambda + \theta = 0; \\ \beta = -\frac{m_2}{m}, \quad \beta_2 = 1. \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées correspondantes des quantités γ, δ, etc.,

$$(5)\quad \begin{cases} \gamma = 1, \quad \gamma_1 = -\frac{m_1}{m}\lambda, \quad \gamma_2 = -1, \\ \delta = -1, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{m_2}{m}\theta. \end{cases}$$

Enfin les quantités μ et μ_1 s'écarteront peu des masses m_1 et m_2. Tous

les écarts de ces valeurs approchées avec les véritables valeurs pourront être supposés de l'ordre des forces perturbatrices.

Il suit des considérations précédentes, que les quantités x, y, z ne s'écarteront de ξ_1, η_1, ζ_1, et que les quantités x_1, y_1, z_1 ne s'écarteront de ξ_2, η_2, ζ_2 que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Donc, si l'on imagine deux corps dont les coordonnées respectives sont x, y, z, et x_1, y_1, z_1, leur mouvement autour du centre de gravité du système des trois corps pourra, en première approximation, être regardé comme elliptique. La même chose aura lieu si le mouvement est rapporté à tout autre point qui ne s'écarte de ce centre que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant ces quantités, on déduit des formules (3) et (13) du n° 1 les équations différentielles qui servent à la première approximation, et que l'on intégrera par les formules elliptiques connues,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{x}{r^3},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{y}{r^3},\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{z}{r^3},\\
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{x_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{y_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{z_1}{r_1^3},
\end{aligned}\right.$$

où les facteurs $-\frac{m_1}{\gamma_2\mu}$, $\frac{m_2}{\delta_1\mu_1}$ ne s'écartent de l'unité que de quantités du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices. Si l'une des deux planètes, par exemple la seconde, est beaucoup plus éloignée du Soleil que l'autre, il conviendra de substituer aux trois dernières de ces équations celles-ci :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{x_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{y_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{z_1}{r_1^3}.
\end{aligned}\right.$$

Dans les approximations successives l'on pourra laisser indéterminées les quantités μ, μ_1, γ, δ, etc.; seulement il sera bon de fixer la valeur de la quantité $\frac{\delta}{\gamma}$. Si l'on fait exactement

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \quad \delta = \beta_1 - \beta_2 = -1,$$

on aura

$$(8) \quad \xi_1 - \xi_2 = x - x_1, \quad \eta_1 - \eta_2 = y - y_1, \quad \zeta_1 - \zeta_2 = z - z_1.$$

Dans ce cas, on peut envisager les quantités x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées des deux planètes elles-mêmes, mais rapportées à un autre point que le centre de gravité du système. En effet, on pourra faire, en même temps,

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_1 = x + \mathrm{a}, & \eta_1 = y + \mathrm{b}, & \zeta_1 = z + \mathrm{c}, \\ \xi_2 = x_1 + \mathrm{a}, & \eta_2 = y_1 + \mathrm{b}, & \zeta_2 = z_1 + \mathrm{c}, \end{cases}$$

a, b, c étant déterminées par les équations

$$(10) \quad \mathrm{a} = \alpha_2 x + \beta_1 x_1, \quad \mathrm{b} = \alpha_2 y + \beta_1 y_1, \quad \mathrm{c} = \alpha_2 z + \beta_1 z_1.$$

Or, des équations

$$\xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1,$$

on tire

$$\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 = (\alpha_1 + \beta_1)\alpha_2 x + (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1 x_1;$$

et comme on a

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2,$$

on aura aussi

$$\mathrm{a} = \frac{\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

On trouve de la meme manière

$$\mathrm{b} = \frac{\alpha_2 \eta_1 + \beta_1 \eta_2}{\alpha_1 + \beta_1}, \quad \mathrm{c} = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_1 \zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

Si l'on retranche des coordonnées a, ξ_1 et ξ_2 la même quantité

$$\frac{m\xi + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{\mathrm{M}},$$

M étant la somme des masses, on trouvera, après quelques réductions,

la valeur suivante de a, et de la même manière les valeurs ci-jointes de b et de c,

$$(11)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\xi + \gamma_1 \xi_1 - \delta_2 \xi_2}{1 + \gamma_1 - \delta_2}, \\ b = \dfrac{\eta + \gamma_1 \eta_1 - \delta_2 \eta_2}{1 + \gamma_1 - \delta_2}, \\ c = \dfrac{\zeta + \gamma_1 \zeta_1 - \delta_2 \zeta_2}{1 + \gamma_1 - \delta_2}. \end{cases}$$

Les constantes γ_1 et δ_2 qui entrent dans ces formules pourront être des quantités quelconques remplissant l'équation de condition

$$(12)\quad \left(\gamma_1 - \frac{m_1}{m}\right)\left(\delta_2 + \frac{m_2}{m}\right) = \frac{M}{m}\gamma_1 \delta_2;$$

il sera donc, entre autres, permis de faire

$$(13)\quad \delta_2 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = 0, \quad \delta_2 = -\frac{m_2}{m}.$$

En supposant toujours

$$\gamma = -\delta = 1,$$

on aura encore

$$(14)\quad \begin{cases} M\alpha = -[(m_1 + m_2)\gamma_1 + m_1], & M\beta = (m_1 + m_2)\delta_2 - m_1, \\ M\alpha_1 = m\gamma_1 + m + m_2, & M\beta_1 = -(m\delta_2 + m_2), \\ M\alpha_2 = m\gamma_1 - m_1, & M\beta_2 = -m\delta_2 + m + m_1, \\ \gamma_2 = -(1 + \gamma_1), & \delta_1 = 1 - \delta_2, \\ \mu = mm_2\gamma_1 \dfrac{1 + \gamma_1 - \delta_2}{m\delta_2 + m_2} = \dfrac{m_2(m\gamma_1 - m_1)}{M\delta_2}(1 + \gamma_1 - \delta_2), \\ \mu_1 = mm_1\delta_2 \dfrac{1 + \gamma_1 - \delta_2}{m\gamma_1 - m_1} = \dfrac{m_1(m\delta_2 + m_2)}{M\gamma_1}(1 + \gamma_1 - \delta_2). \end{cases}$$

Les formules (11) sont indépendantes de l'origine des coordonnées; elles font voir que le point autour duquel on suppose les deux planètes décrire des orbites elliptiques variables est le centre de gravité des trois corps, si l'on donne respectivement au Soleil, à la première et à la deuxième planète, les masses 1, γ_1, $-\delta_2$. Si l'on fait $\delta_2 = 0$, ce point deviendra le centre de gravité du Soleil et de la première planète, en

leur attribuant leurs masses effectives m et m_1. On aura dans ce cas

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha = -\frac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = -\frac{m_1}{M}, & \beta_1 = -\frac{m_2}{M}, & \beta_2 = \frac{m+m_1}{M}, \\ \gamma = 1, & \gamma_1 = \frac{m_1}{m}, & \gamma_2 = -\left(1+\frac{m_1}{m}\right), \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = 0, \\ \mu = m_1\left(1+\frac{m_1}{m}\right), & & \mu_1 = m_2\frac{m+m_1}{M}. \end{array}\right.$$

On voit donc qu'il faudra attribuer aux planètes des masses un peu différentes dont la raison n'est plus $\frac{m_1}{m_2}$, mais $\frac{m_1}{m_2}\frac{M}{m}$.

3. Ayant établi entre les quantités x, y, etc., les équations (6) du n° 2, les corps dont les coordonnées sont x, y, z et x_1, y_1, z_1, décriront autour de l'origine des coordonnées comme foyer des orbites elliptiques. Nommons, par rapport au premier de ces corps.

$2a$ le grand axe de son orbite,
$2p$ le paramètre,
i l'inclinaison du plan de l'orbite à un plan fixe,
Ω la longitude du nœud ascendant du plan de l'orbite sur le plan fixe.

et notons d'un trait les mêmes quantités rapportées au deuxième corps; cela posé, on aura par les formules connues, pour le mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{p}\cos i, \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega, \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = -k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega, \\ x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt} = k_1\sqrt{p_1}\cos i_1, \\ y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1, \\ z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt} = -k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1, \end{array}\right.$$

où l'on a

$$(2)\qquad kk = -\frac{1}{\gamma_2}\frac{mm_1}{\mu},\quad k_1k_1 = \frac{1}{\delta_1}\frac{mm_2}{\mu_1},$$

et où pour le plan des x et y est pris le plan fixe, et pour l'axe des x la droite fixe de laquelle les nœuds ascendants sont comptés.

Pour le véritable mouvement donné par les équations (13) du n° I, on laisse subsister la forme des expressions elliptiques, en en faisant varier les éléments. Dans cette supposition, *l'on a entre les six éléments troublés* p, i, Ω, p_1, i_1, Ω_1, *trois équations au moyen desquelles on exprime immédiatement les trois quantités*

$$\sqrt{p_1}\cos i_1,\quad \sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1,\quad \sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1,$$

par les trois autres

$$\sqrt{p}\cos i,\qquad \sqrt{p}\sin i\sin\Omega,\qquad \sqrt{p}\sin i\cos\Omega.$$

En effet, en substituant les formules (1) dans les formules (15) du n° I, l'on trouve entre ces quantités les simples relations suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\cos i_1 = c_2,\\ \mu k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1 = c,\\ \mu k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1 = c_1, \end{cases}$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

On sait que l'on peut disposer de la direction des axes des coordonnées de manière à faire évanouir deux des trois constantes c, c_1, c_2. Supposons donc

$$c = 0,\qquad c_1 = 0,$$

le plan des x et y sera celui auquel Laplace a donné le nom de *plan invariable*. En faisant

$$c = c_1 = 0,$$

les équations (3) se changent dans les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\cos i_1 = c_2,\\ \mu k\sqrt{p}\sin i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1 = 0.\\ \qquad\qquad \Omega = \Omega_1. \end{cases}$$

Les deux premières de ces formules font voir *que les inclinaisons des*

plans des deux orbites au plan invariable sont parfaitement déterminées par les deux paramètres, et *vice versâ*. Nommant $I = i_1 - i$ l'inclinaison mutuelle des deux plans, on déterminera I par la formule

$$(5)\qquad 4\mu\mu_1 hh_1\sqrt{pp_1}\sin I^2 = \{\mu h\sqrt{p} + \mu_1 h_1\sqrt{p_1}\}^2 - c,$$

et ensuite on aura i et i_1 eux-mêmes par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} c_2 \sin i_1 = \mu h\sqrt{p}\sin I, \\ c_2 \sin i = -\mu_1 h_1\sqrt{p_1}\sin I. \end{cases}$$

Il suit de ces formules *que le plan invariable passera constamment entre les plans des deux orbites*. On voit par la troisième des formules (4), que *l'intersection commune des plans des deux orbites se meut dans le plan invariable*. Je remarque que la position du plan d'une orbite est indépendante de la forme que l'on suppose à cette orbite, et qu'elle est entièrement déterminée dès que le centre du mouvement ou l'origine des coordonnées est fixé. En effet, ce plan est celui qui passe, dans chaque moment du temps, par l'origine des coordonnées et par deux positions consécutives de la planète.

4. L'intersection commune des plans des deux orbites tournant autour du centre des coordonnées dans un plan fixe dans l'espace, et que l'on prendra pour celui des x et des y, il paraît naturel de prendre pour variables,

Les deux rayons vecteurs. . . . . r et r_1.
Leurs distances au nœud ascendant commun des plans des deux orbites. . . . . v et v_1,
Les inclinaisons de ces plans au plan invariable. . . . . i et i_1,
La longitude du nœud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x. . . . . Ω.

Par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), \\ z = r\sin i\sin v, \\ x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1. \end{cases}$$

Nommons δv l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs de la première planète fictive; comme dans le plan de l'orbite d'une planète se trouve aussi sa position consécutive, on tirera des formules (1) les deux systèmes de formules

$$(2)\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = -(\cos\Omega\sin v + \sin\Omega\cos i\cos v)\,\delta v = \mathrm{A}\,\delta v, \\ d\frac{y}{r} = -(\sin\Omega\sin v - \cos\Omega\cos i\cos v)\,\delta v = \mathrm{B}\,\delta v, \\ d\frac{z}{r} = \sin i\cos v\,\delta v = \mathrm{C}\,\delta v; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = \mathrm{A}dv + \mathrm{A}'di - \frac{y}{r}\,d\Omega, \\ d\frac{y}{r} = \mathrm{B}dv + \mathrm{B}'di + \frac{x}{r}\,d\Omega, \\ d\frac{z}{r} = \mathrm{C}dv + \mathrm{C}'di, \end{cases}$$

en faisant

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{A}' = \sin\Omega\sin i\sin v, \\ \mathrm{B}' = -\cos\Omega\sin i\sin v, \\ \mathrm{C}' = \cos i\sin v. \end{cases}$$

Il suit des formules (2) et (3),

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = \mathrm{A}(dv - \delta v) + \mathrm{A}'di - \frac{y}{r}\,d\Omega, \\ 0 = \mathrm{B}(dv - \delta v) + \mathrm{B}'di + \frac{x}{r}\,d\Omega, \\ 0 = \mathrm{C}(dv - \delta v) + \mathrm{C}'di. \end{cases}$$

On tire des formules (1), (2) et (4),

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\Omega.\mathrm{A} + \sin\Omega.\mathrm{B} = -\sin v, \\ \cos\Omega.\mathrm{A}' + \sin\Omega.\mathrm{B}' = 0, \\ -\cos\Omega.y + \sin\Omega.x = -r\cos i\sin v. \end{cases}$$

On aura donc, d'après les formules (5),

$$(7)\quad \begin{cases} \delta\upsilon - d\upsilon = \cos i d\Omega = \operatorname{tang}\upsilon . \dfrac{di}{\operatorname{tang} i}, \\ d\Omega = \operatorname{tang}\upsilon . \dfrac{di}{\sin i}. \end{cases}$$

La formule

$$\delta\upsilon - d\upsilon = \cos i d\Omega$$

peut être déduite aisément de la considération d'un triangle sphérique formé par les côtés

$$d\Omega, \quad \upsilon + \delta\upsilon, \quad \upsilon + d\upsilon.$$

Soient

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\Omega = n\cos p, & \sin\Omega = n'\cos p', \\ \cos i \sin\Omega = n\sin p, & \cos i\sin\Omega = n'\sin p', \end{cases}$$

on aura

$$(9)\quad \begin{cases} x = r.n\cos(\upsilon + p), & y = r.n'\cos(\upsilon - p'), \\ d.\dfrac{x}{r} = -n\sin(\upsilon + p)\delta\upsilon, & d.\dfrac{y}{r} = -n'\sin(\upsilon - p')\delta\upsilon. \end{cases}$$

Il s'ensuit de ces formules.

$$xd.\frac{y}{r} - yd.\frac{x}{r} = rnn'\sin(p - p')\delta\upsilon,$$

$$yd.\frac{z}{r} - zd.\frac{y}{r} = r\sin i.n'\cos p'.\delta\upsilon,$$

$$zd.\frac{x}{r} - xd.\frac{z}{r} = -r\sin i.n\cos p.\delta\upsilon,$$

ou, en substituant les formules (8),

$$(10)\quad \begin{cases} xdy - ydx = rr\cos i.\delta\upsilon, \\ ydz - zdy = rr\sin\Omega\sin i.\delta\upsilon, \\ zdx - xdz = -rr\cos\Omega\sin i.\delta\upsilon. \end{cases}$$

Ajoutant les carrés de ces équations, on a, d'après des formules connues,

$$rr(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2) = r^4\delta\upsilon^2,$$

ou

$$(11)\qquad dx\,dx + dy\,dy + dz\,dz = dr\,dr + rr\,\delta\upsilon\,\delta\upsilon.$$

Pour avoir des formules semblables par rapport à la deuxième des planètes fictives, on n'a qu'à ajouter un trait à chaque lettre dans les formules (2), (10) et (11), pourvu qu'on nomme $d\upsilon_1$ l'angle que forment ses deux rayons vecteurs consécutifs. Donc, puisqu'on a $\Omega_1 = \Omega$, il viendra, d'après la seconde des formules (7),

$$(12)\qquad \operatorname{tang}\upsilon\,.\,\frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang}\upsilon_1\,.\,\frac{di_1}{\sin i}.$$

Mettant $c = c_1 = 0$ dans les formules (15), n° **1**, et substituant les formules (10), ainsi que leurs semblables relatives à la deuxième planète, on a

$$(13)\qquad \begin{cases} \mu rr\cos i\,.\,\delta\upsilon + \mu_1 r_1 r_1 \cos i_1\,.\,\delta\upsilon_1 = c_2\,dt, \\ \mu rr\sin i\,.\,\delta\upsilon + \mu_1 r_1 r_1 \sin i_1\,.\,\delta\upsilon_1 = 0. \end{cases}$$

De ces formules on tire les valeurs suivantes de $\delta\upsilon$ et de $\delta\upsilon_1$,

$$(14)\qquad \begin{cases} \delta\upsilon = d\upsilon + \operatorname{tang}\upsilon\,\dfrac{di}{\operatorname{tang} i} = \dfrac{c_2 \sin i}{\mu rr \sin \mathrm{I}}\,dt, \\ \delta\upsilon_1 = d\upsilon_1 + \operatorname{tang}\upsilon_1 \dfrac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} = -\dfrac{c_2 \sin i}{\mu_1 r_1 r_1 \sin \mathrm{I}}\,dt, \end{cases}$$

où, comme ci-dessus, on a fait $\mathrm{I} = i_1 - i$. Substituant la première de ces formules dans la première des formules (10). il vient

$$(15)\qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{c_2 \sin i_1 \cos i}{\mu \sin \mathrm{I}}.$$

La différentielle de cette quantité sera égale à

$$-\frac{c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin \mathrm{I}^2}\,d.\frac{\sin \mathrm{I}}{\sin i_1 \cos i} = \frac{c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin \mathrm{I}^2}\,d.\operatorname{tang} i\,c\,.\operatorname{tang} i_1;$$

on aura donc

$$(16)\qquad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{c_2}{\mu \sin \mathrm{I}^2}\left(\sin i_1 \cos i_1 \frac{di}{dt} - \sin i \cos i \frac{di_1}{dt}\right).$$

On tire encore des formules (11) et (14) la suivante

$$(17)\qquad \cos i_1 dv - \cos i dv_1 = \frac{c_2}{\sin I}\left(\frac{\sin i_1 \cos i_1}{\mu r r} + \frac{\sin i \cos i}{\mu_1 r_1 r_1}\right) dt.$$

L'expression de la force vive du système est fournie par la formule (4), n° 1, et par les formules (11) et (14) données ci-dessus,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} 2T &= \mu\left[rr\left(\frac{\partial v}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{dt}\right)^2\right] + \mu_1\left[r_1 r_1\left(\frac{\partial v_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{dt}\right)^2\right] \\ &= \frac{c_2^2}{\sin I^2}\left(\frac{\sin i_1^2}{\mu r r} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Les formules (12) et (19), n° 1, donnent

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} 2T &= 2U - 2h, \\ \mu r\frac{d^2r}{dt^2} + \mu_1 r_1\frac{d^2r_1}{dt^2} + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 &= U - 2h, \end{aligned}\right.$$

d'où vient

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu\left[2r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + \mu_1\left[2r_1\frac{d^2r_1}{dt^2} + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ &\qquad - \frac{c_2^2}{\sin I^2}\left[\frac{\sin i_1^2}{\mu r r} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right] + 2h = 0. \end{aligned}\right.$$

Remarquons encore la formule qui dérive des formules (1),

$$(21)\qquad xy_1 - yx_1 = rr_1(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1).$$

Des formules (12) et (16) on tire

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{c_2 \sin i_1}{\mu \cos v \sin v_1 \sin I^2}(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1)\frac{di}{dt} \\ &= \frac{c_2 \sin i_1 (xy_1 - yx_1)}{\mu \cos v \sin v_1 \sin I^2 r r_1}\frac{di}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Substituant cette formule dans la dernière des formules (14), n° 1, il vient

$$(23)\qquad \frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2 r r_1}\frac{di}{dt} = -\left(\frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3} + \frac{m m_1 \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}\right).$$

Comme on a, d'après les formules (11) et (14),

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z &= \tfrac{1}{2}\,d^2.rr - (dr\,dr + rr\,\delta\upsilon^2) \\ &= r\,d^2r - c_2^2\,\frac{\sin i_1^2}{\mu^2 r^2 \sin \mathrm{I}^2}\,dt^2, \end{aligned}\right.$$

il suit des formules (13), n° **1**,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\,\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c_2 c_2}{\mu}\,\frac{\sin i_1^2}{\sin \mathrm{I}^2 r^3} &- \frac{m m_1 \gamma_2 (\gamma_2 r + \delta_2 r_1 \cos \mathrm{V})}{\rho_2^3} \\ &- \frac{m m_2 \gamma_1 (\gamma_1 r + \delta_1 r_1 \cos \mathrm{V})}{\rho_1^3} - \frac{m_1 m_2 \gamma (\gamma r + \delta r_1 \cos \mathrm{V})}{\rho^3}. \end{aligned}\right.$$

Des formules (18) et (25) on peut déduire la suivante

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{c_2^2}{\mu r r}\,d.\frac{\sin i_1^2}{\sin \mathrm{I}^2} + \frac{c_2^2}{\mu_1 r_1 r_1}\,d\,\frac{\sin^2 i^2}{\sin \mathrm{I}^2} \\ &= 4 r r_1 \sin \mathrm{V}\,d\mathrm{V}\left(\frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3} + \frac{m m_2 \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}\right). \end{aligned}\right.$$

On obtient aussi la valeur de $d\mathrm{V}$ en observant que, dans l'équation

$$\cos \mathrm{V} = \cos \upsilon \cos \upsilon_1 + \cos \mathrm{I} \sin \upsilon \sin \upsilon_1,$$

on peut mettre en même temps $\mathrm{V} + d\mathrm{V}$, $\upsilon + \delta\upsilon$, $\upsilon_1 + \delta\upsilon_1$ au lieu de V, υ, υ_1, ce qui donne

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \sin \mathrm{V}\,d\mathrm{V} = (\sin \upsilon \cos \upsilon_1 &- \cos \mathrm{I} \cos \upsilon \sin \upsilon_1)\,\delta\upsilon \\ &+ (\cos \upsilon \sin \upsilon_1 - \cos \mathrm{I} \sin \upsilon \cos \upsilon_1)\,\delta\upsilon_1. \end{aligned}\right.$$

Si, dans le triangle sphérique formé par les côtés V, υ, υ_1, on nomme φ et φ_1 les angles opposés aux côtés υ et υ_1, on a

$$(28)\qquad d\mathrm{V} = \cos \varphi\,\delta\upsilon + \cos \varphi_1\,\delta\upsilon_1,$$

formule qui fournit l'interprétation géométrique de la formule (27).

Les formules (14), (23) et (27) pourront servir à vérifier la formule (26).

5. Entre les six quantités

$$r,\ r_1;\quad \upsilon,\ \upsilon_1;\quad i,\ i_1$$

et le temps t, on a, d'après les formules (12), (14), (19), (23) du pré-

cédent article, les équations suivantes, qui pourront servir à développer ces quantités en fonction du temps.

Équations différentielles du problème des trois corps.

I. $$\operatorname{tang} \upsilon \, \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} \upsilon_1 \cdot \frac{di_1}{\sin i_1},$$

II. $$\operatorname{tang} \upsilon \, \frac{di}{\operatorname{tang} i} + d\upsilon = \frac{c_2}{\mu} \cdot \frac{\sin i_1}{\sin \mathrm{I}} \frac{dt}{rr},$$

III. $$\operatorname{tang} \upsilon \, \frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} + d\upsilon_1 = \frac{c_2}{\mu_1} \cdot \frac{\sin i}{\sin \mathrm{I}} \frac{dt}{r_1 r_1},$$

IV. $$\frac{c_2 \sin i_1}{\cos \upsilon \sin \upsilon_1 \sin \mathrm{I}^2 rr_1} di = -\left(\frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3} + \frac{m m_2 \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}\right) dt,$$

V. $$\frac{c_2^2}{\sin \mathrm{I}^2} \left(\frac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1 \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U} - 2h,$$

VI. $$\frac{d^2(\mu rr + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2\mathrm{U} - 4h.$$

On a mis dans ces formules

$$(1) \quad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{mm_1}{\rho_2} + \dfrac{mm_2}{\rho_1} + \dfrac{m_1 m_2}{\rho}, \\ \rho\rho = \gamma\gamma rr + 2\gamma\delta rr_1 \cos \mathrm{V} + \delta\delta r_1 r_1, \\ \rho_1\rho_1 = \gamma_1\gamma_1 rr + 2\gamma_1\delta_1 rr_1 \cos \mathrm{V} + \delta_1\delta_1 r_1 r_1, \\ \rho_2\rho_2 = \gamma_2\gamma_2 rr + 2\gamma_2\delta_2 rr_1 \cos \mathrm{V} + \delta_2\delta_2 r_1 r_1, \\ \cos \mathrm{V} = \cos \upsilon \cos \upsilon_1 + \cos \mathrm{I} \sin \upsilon \sin \upsilon_1. \end{cases}$$

Entre les six constantes γ, δ, etc., on a les équations de condition

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0. \\ m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1 \delta_1 + m m_1 \gamma_2 \delta_2 = 0. \end{cases}$$

où m, m_1, m_2 sont les masses du Soleil et des deux planètes. Donc trois des constantes γ, δ, etc., pourront être prises à l'arbitraire. Les quantités μ et μ_1 sont déterminées par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \mathrm{M}\mu = m_1 m_2 \gamma\gamma + m_2 m \gamma_1\gamma_1 + m m_1 \gamma_2\gamma_2, \\ \mathrm{M}\mu_1 = m_1 m_2 \delta\delta + m_2 m \delta_1\delta_1 + m m_1 \delta_2\delta_2, \end{cases}$$

M étant la somme des trois masses.

Après avoir intégré complétement le système des six équations (I à VI), on a encore à déterminer l'angle Ω au moyen de la formule

$$\text{VII.} \qquad d\Omega = \operatorname{tang} v . \frac{di}{\sin i},$$

ce qui se fait par une simple quadrature. On formera ensuite les six quantités

$$(4) \quad \begin{cases} x = r\,(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), \\ y = r\,(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), \\ z = r\sin i\sin v, \\ x_1 = r_1\,(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y_1 = r_1\,(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1, \end{cases}$$

et les six constantes

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1}{M}, & \beta = \dfrac{m_1\delta_2 - m_2\delta_1}{M}, \\ \alpha_1 = \dfrac{m_2\gamma - m\gamma_2}{M}, & \beta_1 = \dfrac{m_2\delta - m\delta_2}{M}, \\ \alpha_2 = \dfrac{m\gamma_1 - m_1\gamma}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m\delta_1 - m_1\delta}{M}, \end{cases}$$

après quoi on aura les coordonnées rectangulaires du Soleil et des deux planètes, rapportées à leur centre de gravité, le plan invariable étant pris pour celui des x et y,

$$6) \quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, \\ \eta = \alpha y + \beta y_1, & \eta_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \eta_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1, \\ \zeta = \alpha z + \beta z_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1. \end{cases}$$

Voilà donc le problème des trois corps réduit à l'intégration des six équations (I à VI) et à une quadrature. *Les six équations différentielles* (I à VI) *sont toutes du premier degré, hors une seule qui est du second, et il n'y entre aucune trace des nœuds.*

NOTE RELATIVE A L'ÉLIMINATION;

Par M. FINCK,

Professeur de Mathématiques à Strasbourg.

Ce qui suit a trait au Mémoire sur le degré de l'élimination, par M. Minding. (Tome VI de ce Journal, page 412.) Pour déterminer ce degré, l'auteur emploie la réduction en séries, appliquée aux racines d'une équation. Pour faire descendre dans les éléments la propriété en question, j'ai dû chercher à éviter les séries. Voici comment j'y parviens.

Soit l'équation

$$(1)\quad x^4(y^6+\ldots)+x^3(y^2+\ldots)+x^2(y^7+\ldots)+x(y+\ldots)+y^2+\ldots=0.$$

Je nomme α_1, α_2, α_3, α_4 les quatre valeurs de x; je les suppose rangées d'après leur degré en y, α_4 étant celle dont le degré est le plus faible.

Soit i une indéterminée; divisons l'équation (1) par y^{4i} et par le facteur de x^4; il vient

$$(2)\quad \left(\frac{x}{y^i}\right)^4+\left(\frac{x}{y^i}\right)^3\cdot\frac{y^2+\ldots}{y^{6+i}+\ldots}+\left(\frac{x}{y^i}\right)^2\cdot\frac{y^7+\ldots}{y^{4+2i}+\ldots}+\frac{x}{y^i}\cdot\frac{y+\ldots}{y^{6+4i}+\ldots}+\frac{y^2+\ldots}{y^{6+4i}}=0.$$

On cherchera s'il est possible de disposer de i, de telle sorte que, parmi les quatre valeurs de $\frac{x}{y^i}$, il y en ait trois qui soient nulles, et que la quatrième soit finie et différente de zéro si $y=\infty$; la valeur de i qui satisferait à cette condition serait le degré de α_1. Pour cela, il faut et il suffit que, dans le coefficient de $\left(\frac{x}{y^i}\right)^3$, le dénominateur soit de même degré que le numérateur, tandis que dans les suivants, le dénominateur doit être d'un degré supérieur à celui du numérateur correspondant.

On essaye donc

$$6 + i = 2, \quad 6 + 2i > 7, \quad 6 + 3i > 1, \quad 6 + 4i > 2.$$

La valeur $i = -4$, tirée de la première relation, ne satisfait point aux autres, d'où l'on conclura que α_1, α_2 sont du même degré. Pour déterminer ce degré, on posera, par rapport à l'équation (2),

$$6 + i \overset{=}{>} 2. \quad 6 + 2i = 7, \quad 6 + 3i > 1, \quad 6 + 4i > 2, \quad \text{d'où} \quad i = \tfrac{1}{2},$$

qui remplit toutes les autres conditions. Donc α_1, α_2 sont du degré $\frac{1}{2}$.

Reprenant l'équation (2), on sait que parmi les quatre valeurs de $\frac{x}{y^i}$, il y en a deux qui deviennent infinies avec y si $i < \frac{1}{2}$. Relativement aux deux autres valeurs de $\frac{x}{y^i}$, on supprimera donc les deux premiers termes de l'équation (2), et on la divisera par le facteur de $\left(\frac{x}{y^i}\right)^2$: d'où

$$\left(\frac{x}{y^i}\right)^2 + \frac{x}{y^i} \cdot \frac{y + \ldots}{y^{7+i} + \ldots} + \frac{y^2 + \ldots}{y^{7+2i}} = 0.$$

Cherchons si avec $y = \infty$, le dernier terme peut s'annuler sans que le facteur de $\frac{x}{y^i}$ s'annule. A cet effet, il faut que $7 + i = 1$, et $7 + 2i > 2$, ce qui ne se peut. Donc α_3, α_4 sont du même degré. Pour déterminer ce degré, on fera

$$7 + i \overset{=}{>} 1, \quad 7 + 2i = 2, \quad \text{d'où} \quad i = -\tfrac{5}{2};$$

c'est le degré de α_3 et α_4.

En appliquant la méthode aux exemples de M. Minding, on retrouve ses nombres. Je pense que ce qui précède suffit.

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Au}{(a+2bx+cx^2)^2};$$

PAR M. BESGE.

On devrait, ce me semble, dire un mot de cette équation (où A, a, b, c sont des constantes quelconques) dans les Traités élémentaires: car elle est du très-petit nombre de celles qu'on peut intégrer sous forme finie. En effet, si l'on pose $u = e^{\int y dx}$, il vient

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{A}{(a+2bx+cx^2)^2}.$$

Or Euler a reconnu [*] et il est facile de vérifier qu'en prenant

$$y = \frac{b+k+cx}{a+2bx+cx^2}, \quad \text{et} \quad k = \pm\sqrt{b^2-ac+A},$$

on satisfait à cette dernière équation. Il est donc aisé de trouver deux valeurs particulières de u, et par suite de former l'intégrale complète de l'équation linéaire du second ordre dont u dépend.

[*] *Voyez* les Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. III, 1809 et 1810.

DÉVELOPPEMENTS SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR J. LIOUVILLE.

1. Le centre des moyennes distances des points de contact d'une courbe géométrique plane avec la série complète des tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à une droite donnée, est un point fixe qui ne dépend en aucune façon de la position de cette droite. Cette proposition curieuse de géométrie a été donnée d'abord par M. Chasles qui l'a déduite fort élégamment d'un théorème de Newton sur les diamètres des courbes. Je l'ai démontrée ensuite dans le tome VI de ce Journal (page 363), en faisant usage d'une méthode particulière d'élimination.

Représentons, en effet, par

$$M(x, y) = 0, \quad \text{ou simplement par} \quad M = 0,$$

l'équation de la courbe géométrique rapportée à deux axes quelconques ox, oy, et par a un paramètre arbitraire. Soient m le degré de M, et x_1 l'abscisse du centre des moyennes distances des $m(m-1)$ points de contact dont nous venons de parler; $m(m-1)x_1$ aura pour valeur la somme $\sum x$ des racines x de l'équation finale résultant de l'élimination de y entre

$$M = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0.$$

Or, en décomposant M dans la somme des groupes homogènes de degrés m, $m-1$,... qui le composent, à savoir,

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

j'ai obtenu pour $\sum x$ l'expression suivante

$$\sum x = -\sum \frac{f''(\alpha)\alpha' + f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

où le $\sum$ du second membre s'étend à toutes les racines α de $f(\alpha) = 0$ et où l'on doit faire

$$\alpha' = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)};$$

je n'ai pas besoin d'ajouter que

$$f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}, \quad f''(\alpha) = \frac{df'(\alpha)}{d\alpha}.$$

Cette valeur de $\sum x$ étant indépendante de a, x_1 n'en dépend pas non plus, et c'est en cela précisément que le théorème énoncé consiste.

2. Mais en discutant de plus près la valeur de x_1 et se rappelant que les équations des m asymptotes de la courbe sont comprises dans la formule générale

$$y = \alpha x + \alpha',$$

on est conduit à un résultat assez intéressant que je vais faire connaître, à savoir, que le point fixe C est aussi le centre des $\frac{m(m-1)}{2}$ points de rencontre mutuelle des asymptotes de la courbe géométrique à laquelle on mène les tangentes.

Pour le faire voir de la manière la plus simple, observons que la valeur de x_1 dépendant des seules fonctions f et f_1 ne dépend, par cela même, que de la position des asymptotes de la courbe; celle-ci pourra donc sans inconvénient être remplacée soit par une autre ligne de degré m ayant les mêmes asymptotes, soit encore par le groupe de ces asymptotes qu'on peut regarder comme composant une ligne de degré m; dans ce dernier cas, au lieu de M on prendra le produit

$$\Pi(y - \alpha x - \alpha'),$$

qui, lorsqu'on l'égale à zéro, fournit successivement toutes les asymp-

totes; on pourra d'ailleurs faire $a = 0$, puisque $\sum x$ ne dépend pas de a, et au lieu des deux équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0,$$

on aura celles-ci :

$$\Pi(y - \alpha x - \alpha') = 0, \quad \frac{d}{dx}\Pi(y - \alpha x - \alpha') = 0.$$

Pour $m = 3$, par exemple, ces équations sont de la forme

$$(y - \alpha x - \alpha')(y - \alpha_1 x - \alpha'_1)(y - \alpha_2 x - \alpha'_2) = 0,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\,(y - \alpha_1 x - \alpha'_1)(y - \alpha_2 x - \alpha'_2) \\ +\alpha_1(y - \alpha x - \alpha')(y - \alpha_2 x - \alpha'_3) \\ +\alpha_2(y - \alpha x - \alpha')(y - \alpha_1 x - \alpha'_1) \end{array}\right\} = 0.$$

L'une a pour premier membre le produit des facteurs $(y - \alpha x - \alpha')$, et l'autre la somme de leurs produits $(m - 1)$ à $(m - 1)$, multipliés respectivement par les diverses valeurs de α.

La première ne peut être satisfaite qu'en égalant à zéro un des facteurs $y - \alpha x - \alpha'$, ce qui fournit une quelconque des asymptotes, et pour que la seconde ait lieu ensuite, il faut qu'un autre de ces facteurs soit aussi nul. Donc les valeurs de x, y formant une solution appartiennent aux points de rencontre des asymptotes entre elles, lesquels points doivent d'ailleurs être pris chacun deux fois; la somme des valeurs de x répondant à ces points, et ainsi doublée, fournit la valeur de $\sum x$. Pour avoir x_1, il faut la diviser par $m(m - 1)$ ou par le double du nombre des points de rencontre mutuelle des m asymptotes. L'abscisse x_1 coïncide donc (et cela quel que soit l'axe des x) avec l'abscisse du centre des moyennes distances de ces points de rencontre mutuelle. De là le théorème que nous voulions établir.

3. Il n'est peut-être pas inutile d'observer ici que, quand on a remplacé la courbe géométrique proposée par son groupe d'asymptotes, il n'y a plus à proprement parler de tangentes parallèles à une droite quelconque; mais ces tangentes sont analytiquement remplacées par

des droites passant aux points de rencontre des asymptotes entre elles; droites dont chacune jouit, en effet, de la propriété fondamentale des tangentes de couper la ligne de degré m que nous considérons actuellement (le groupe des asymptotes) en deux points infiniment voisins. Si l'on ajoute que les points de rencontre des asymptotes sont des points *doubles*, on comprendra que notre théorème pourrait être ainsi démontré sans aucun calcul. Mais la marche que nous avons suivie paraît plus nette et plus claire. En tous cas il était essentiel d'insister sur ce qu'on peut à la courbe géométrique donnée substituer pour la recherche du point C toute autre courbe géométrique ayant les mêmes asymptotes. Quelquefois, en effet, il arrivera que les points de contact étant imaginaires pour la courbe primitive cesseront de l'être pour une autre courbe par laquelle on la remplacera. On pourra de cette manière, et en opérant sur la nouvelle figure, trouver graphiquement le point C.

4. La démonstration du n° **2** est à la fois simple et directe. Mais il est bon d'en donner une autre toute analytique et déduite de l'expression même de $\sum x$ rapportée au n° **1**.

Et d'abord cette valeur peut être simplifiée et réduite à

$$\sum x = -\sum \frac{f''(\alpha)\alpha'}{f'(\alpha)},$$

en effaçant le terme

$$\sum \frac{f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

qui est nul, d'après un théorème connu, puisque $f'_1(\alpha)$ est au plus de degré $m-2$, tandis que l'équation $f(\alpha) = 0$ est de degré m.

Soient $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ les m racines de $f(\alpha) = 0$, et $\alpha', \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}$ les valeurs correspondantes de α'. On aura, quel que soit t,

$$f(t) = (t-\alpha)(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_{m-1}) = (t-\alpha)\varphi(t),$$

d'où

$$f'(t) = (t-\alpha)\varphi'(t) + \varphi(t),$$
$$f''(t) = (t-\alpha)\varphi''(t) + 2\varphi'(t);$$

par suite, pour $t = \alpha$,

$$f'(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad f''(\alpha) = 2\varphi'(\alpha),$$

et de là

$$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = 2\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = 2\left(\frac{1}{\alpha-\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha-\alpha_{m-1}}\right).$$

La valeur de $\sum x$ ou de $m(m-1)x_1$ peut donc s'écrire

$$m(m-1)x_1 = 2\sum\left(\frac{\alpha'}{\alpha_1-\alpha}+\frac{\alpha'}{\alpha_2-\alpha}+\ldots+\frac{\alpha'}{\alpha_{m-1}-\alpha}\right).$$

Le signe $\sum$ se rapporte ici aux diverses valeurs que α peut prendre, les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ devant être changées en même temps de manière à ne contenir jamais que les racines qui restent quand on a mis α de côté. Ainsi on pourra écrire encore

$$m(m-1)x_1 = \sum\sum\frac{\alpha'_i-\alpha'_s}{\alpha_s-\alpha_i}.$$

et

$$x_1 = \frac{1}{m(m-1)}\sum\sum\frac{\alpha'_i-\alpha'_s}{\alpha_s-\alpha_i}.$$

en donnant à i et s toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$, sans pourtant jamais faire $i = s$ dans un même terme. Mais les équations de deux asymptotes quelconques étant

$$y = \alpha_i x + \alpha'_i, \quad y = \alpha_s x + \alpha'_s,$$

on en conclut, pour l'abscisse de leur point de rencontre.

$$\frac{\alpha'_i-\alpha'_s}{\alpha_s-\alpha_i};$$

par suite, x_1 est l'abscisse du centre des moyennes distances de ces points de rencontre; c'est ce qu'il fallait démontrer.

5. Reprenons la formule

$$\sum x = -\sum\frac{f''(\alpha)\alpha'+f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

ou plutôt, en supprimant le second terme qui donne une somme nulle,

et remplaçant α' par sa valeur,

$$\sum x = \sum \frac{f''(\alpha) f_1(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

En représentant par $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{m-2}$ les $(m-1)$ racines de $f'(\mu) = 0$, on a

$$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{1}{\alpha - \mu} + \frac{1}{\alpha - \mu_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha - \mu_{m-2}};$$

il vient donc

$$\sum x = \sum \left[\frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu) f'(\alpha)} + \frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu_1) f'(\alpha)} + \ldots + \frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu_{m-2}) f'(\alpha)} \right].$$

Or on sait que généralement

$$\sum \frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu) f'(\alpha)} = - \frac{f_1(\mu)}{f'(\mu)}.$$

Donc

$$\sum x = - \left[\frac{f_1(\mu)}{f'(\mu)} + \frac{f_1(\mu_1)}{f'(\mu_1)} + \text{etc.} \right] = - \sum \frac{f_1(\mu)}{f'(\mu)}.$$

et par conséquent

$$x_1 = - \frac{1}{m(m-1)} \sum \frac{f_1(\mu)}{f'(\mu)}.$$

le signe $\sum$ se rapportant cette fois aux racines μ de $f'(\mu) = 0$.

Cette transformation va nous fournir une nouvelle propriété du centre C.

6. Les deux équations

$$\frac{dM(x, y)}{dx} = 0, \qquad \frac{dM(x, y)}{dy} = 0,$$

considérées à la fois, déterminent en général $(m-1)^2$ points qui ne sont situés que dans des cas très-particuliers sur la courbe représentée par $M(x, y) = 0$ dont ils deviennent alors des points multiples. La position de ces $(m-1)^2$ points ne dépend pas des axes particuliers ox, oy

auxquels il nous plaît de rapporter la courbe [*]. Ils ont avec cette courbe une liaison intime et se présentent utilement dans la théorie des polaires. Je me propose de montrer ici que leur centre des moyennes distances coïncide avec le point C.

Continuons à poser

$$M(x, y) = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

et faisons de plus

$$\begin{aligned} m f(t) - t f'(t) &= F(t), \\ (m-1) f_1(t) - t f'_1(t) &= F_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &; \end{aligned}$$

les équations

$$\frac{dM(x, y)}{dy} = 0, \quad \frac{dM(x, y)}{dx} = 0,$$

prendront la forme

$$x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

$$x^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

et la somme $\sum x$ des abscisses des points dont elles déterminent la

---

[*] Soient, en effet, x', y' les coordonnées pour d'autres axes $o'x'$, $o'y'$; les valeurs de x, y en x', y' étant linéaires, on aura

$$\frac{dM}{dx'} = p\frac{dM}{dx} + q\frac{dM}{dy}, \qquad \frac{dM}{dy'} = p'\frac{dM}{dx} + q'\frac{dM}{dy},$$

où p, q, p', q' sont des constantes. Les équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

entraînent donc celles-ci

$$\frac{dM}{dx'} = 0, \quad \frac{dM}{dy'} = 0,$$

qui réciproquement les reproduiraient à leur tour.

position sera, d'après la méthode d'élimination citée plus haut,

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\mu)\mu' + F_1(\mu)}{F(\mu)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines μ de $f'(\mu) = 0$ et aux valeurs de μ' corespondantes, savoir

$$\mu' = -\frac{f'_1(\mu)}{f''(\mu)}.$$

Or on a

$$F(\mu) = mf(\mu), \quad F'(\mu) = -\mu f''(\mu), \quad F_1(\mu) = (m-1)f_1(\mu) - \mu f'_1(\mu).$$

Donc

$$\sum x = \sum \frac{\mu f''(\mu)\mu' - (m-1)f_1(\mu) + \mu f'_1(\mu)}{mf(\mu)},$$

et de là

$$\sum x = -\frac{m-1}{m}\sum \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)},$$

en ayant égard à la valeur de μ'. Il en résulte, pour l'abscisse du centre des moyennes distances des $(m-1)^2$ points dont nous avons parlé, la valeur suivante :

$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)} = x_1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. On peut présenter cette même analyse sous une forme un peu différente, ainsi qu'il suit. En prenant deux droites quelconques pour axes des x et des y, l'abscisse x_1 du centre C sera fournie par l'égalité

$$x_1 = \frac{\sum x}{m(m-1)},$$

$\sum x$ désignant la somme des racines de l'équation finale en x résultant de

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0.$$

D'un autre côté, $\sum' x$ désignant une somme analogue pour

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

la formule

$$x'_1 = \frac{\sum' x}{(m-1)^2}$$

donne l'abscisse x'_1 du centre des moyennes distances des $(m-1)^2$ points déterminés par ces deux équations. Il s'agit donc de prouver que

$$\sum' x = \frac{m-1}{m} \sum x.$$

Or on a

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.$$

d'où

$$\frac{dM}{dy} = x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.$$

Cela étant, servons-nous encore, pour trouver $\sum x$, de notre méthode d'élimination, mais en prenant comme point de départ la seconde équation $\frac{dM}{dy} = 0$ dont on substituera les racines dans la première. Il viendra, réduction faite,

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

le signe $\sum$ du second membre s'appliquant aux racines de $f'(\alpha) = 0$, ce qui a fait disparaître un terme multiplié par $f'(\alpha)$.

Quant à la somme $\sum' x$, j'observe d'abord que la première de nos deux équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

peut sans inconvénient être remplacée ici par

$$x \frac{dM}{dx} = 0,$$

ce qui n'introduit dans l'équation finale en x que des racines nulles, soit même par

$$x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy} = 0,$$

qui a le même degré que

$$x\frac{dM}{dx} = 0,$$

et dont le dernier terme est nul en vertu de la seconde équation. De là, par le théorème des fonctions homogènes, l'équation

$$mx^m f\left(\frac{y}{x}\right) + (m-1)x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

qu'il faut combiner avec

$$\frac{dM}{dy} = x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

D'après la méthode indiquée, on en conclut

$$\sum{}' x = -\frac{m-1}{m}\sum\frac{f_1(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{m-1}{m}\sum x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

8. La méthode du n° **7** s'étend aux surfaces. Soit

$$M(x, y, z) \quad \text{ou} \quad M = 0,$$

une équation de degré m représentant une surface géométrique quelconque. On sait que le centre C des moyennes distances des $m(m-1)^2$ points de contact de cette surface avec la série complète des plans tangents qu'on peut lui mener parallèlement à un plan donné reste fixe aussi lorsqu'on change à la fois la direction commune de tous ces plans tangents sans altérer leur parallélisme. Nous allons montrer que ce point C jouit d'une propriété toute semblable à celle que nous avons reconnue pour le point analogue dans les lignes planes. Les trois équations suivantes

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

déterminent, en effet, $(m-1)^3$ points évidemment toujours les mêmes quelle que soit la position ou l'inclinaison mutuelle des axes ox, oy, oz auxquels la surface est rapportée, et qui ne sont situés sur la surface que dans des cas très-particuliers. Ces points se présentent utilement dans la théorie des polaires, et leur liaison avec les points singuliers de la surface est manifeste. Or je dis que leur centre des moyennes distances coïncide précisément avec le point C.

En prenant un plan quelconque pour plan des yz, l'abscisse x_1 du point C pour ce plan sera fournie par l'égalité

$$x_1 = \frac{\sum x}{m(m-1)^2},$$

$\sum x$ désignant la somme des $m(m-1)^2$ racines de l'équation finale en x résultant de

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0.$$

D'un autre côté, $\sum' x$ désignant une somme analogue pour les racines x de

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

la formule

$$x'_1 = \frac{\sum' x}{(m-1)^3}$$

donne l'abscisse x'_1 du centre des moyennes distances des $(m-1)^3$ points déterminés par ces trois équations. Il s'agit donc de prouver que

$$\sum' x = \frac{m-1}{m} \sum x.$$

Or, en groupant les termes homogènes, on peut écrire

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots;$$

de là découlent, par la différentiation, les valeurs de

$$\frac{dM}{dx}, \quad \frac{dM}{dy}, \quad \frac{dM}{dz},$$

mises sous une forme analogue. Cela posé, en appliquant aux équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

la méthode d'élimination déjà tant de fois citée, et prenant pour point de départ les racines des deux dernières, on obtiendra, réduction faite,

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\alpha, \beta)}{f(\alpha, \beta)},$$

le signe $\sum$ du second membre s'étendant à toutes les racines (α, β) des deux équations simultanées

$$\frac{df(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta)}{d\beta} = 0.$$

Quant à la somme $\sum' x$, j'observe d'abord que la première de nos trois équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

peut être remplacée ici sans inconvénient par

$$x \frac{dM}{dx} = 0,$$

ce qui n'introduit dans l'équation finale en x que des racines nulles, soit même par

$$x \frac{dM}{dx} + y \frac{dM}{dy} + z \frac{dM}{dz} = 0,$$

eu égard aux deux dernières. De là, par le théorème des fonctions homogènes, l'équation

$$m x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + (m-1) x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots = 0,$$

qu'il faut combiner avec

$$\frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0.$$

De là, par une application nouvelle de nos principes,

$$\sum{}' x = -\frac{m-1}{m} \sum \frac{f_1(\alpha, \beta)}{f(\alpha, \beta)} = \frac{m-1}{m} \sum x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

9. Ces propriétés géométriques répondent à des théorèmes d'analyse qu'on peut étendre aux fonctions algébriques d'un nombre quelconque i de variables $x, y, \ldots, z$. Soit

$$M(x, y, \ldots, z) \quad \text{ou} \quad M = 0,$$

une équation algébrique d'un degré m quelconque. A cette équation, joignons en $(i-1)$ autres dont le premier membre soit de la forme

$$a\frac{dM}{dx} + b\frac{dM}{dy} + \ldots + c\frac{dM}{dz} = 0,$$

$a, b, \ldots, c$ étant des constantes. La somme $\sum x$ des racines de l'équation finale en x résultant de l'élimination de $y, \ldots, z$ entre les i équations indiquées sera indépendante des valeurs de a, b, etc. De plus, elle aura cette relation très-simple,

$$\sum{}' x = \frac{m-1}{m} \sum x,$$

avec la somme $\sum{}' x$ des racines de l'équation finale résultant de l'élimination de $y, \ldots, z$, entre ces i autres équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \ldots, \quad \frac{dM}{dz} = 0.$$

Ai-je besoin d'ajouter qu'il existe beaucoup d'autres théorèmes du même genre que nos formules démontrent facilement, ou plutôt font connaître *à priori* lorsqu'on les examine avec quelque attention ?

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SECTIONS CONIQUES;

PAR J. LIOUVILLE.

Un polygone quelconque étant circonscrit à une conique, chaque côté est divisé par le point où il touche la courbe en deux segments (s, t), et l'on sait que le produit des segments non contigus (s) pour tout le polygone est égal au produit des segments (t). Cette proposition, à la fois importante et très-simple, a été déjà établie de tant de manières, qu'il doit paraître peu utile d'en donner encore une démonstration nouvelle. Celle que je vais présenter et qui fournit d'ailleurs une expression curieuse du rapport des deux tangentes AM, AN menées d'un point A quelconque à une conique, mérite pourtant, je crois, quelque attention parce que le théorème dont elle se déduit est général et relatif à des courbes de degré quelconque.

Le théorème dont je parle est démontré dans les dernières pages de mon *Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie*, etc. (Tome VI de ce Journal, page 411.) Ce Mémoire, où j'ai posé, si je ne me trompe, les premiers principes de la théorie des transversales curvilignes considérée dans toute son étendue, renferme entre autres la proposition suivante :

« Deux courbes géométriques étant situées dans un même plan, représentons, en général, par R, r les rayons de courbure de ces courbes à un de leurs points d'intersection, et par Ω, ω les angles que les tangentes menées en ces points aux deux courbes font avec » un axe fixe pris à volonté; on aura

$$\sum\left(\frac{\cos\omega}{R}-\frac{\cos\Omega}{r}\right)\operatorname{cosec}^3(\Omega-\omega)=0,$$

» le signe sommatoire du premier membre s'étendant à tous les points » d'intersection, réels ou imaginaires, bien entendu. »

Supposons maintenant que la première de nos deux lignes planes soit une conique et que l'autre se réduise à une ligne droite coupant la conique aux deux points M, N. Prenons de plus pour axe fixe cette droite même. Les rayons de courbure r relatifs à la droite seront infinis; les angles ω seront nuls; et notre équation ainsi particularisée deviendra

$$\frac{\operatorname{cosec}^3 \Omega}{R} = \frac{\operatorname{cosec}^3 \Omega'}{R'},$$

R, R′ étant les rayons de courbure en M, N, et Ω, Ω′ représentant les angles M, N du triangle AMN formé par la corde MN et les tangentes menées à la conique aux points M et N. Or le rapport des cosécantes de ces angles est celui des inverses de leurs sinus ou celui des côtés AM, AN. On a donc

$$\frac{\overline{AM}^3}{\overline{AN}^3} = \frac{R}{R'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt[3]{R}}{\sqrt[3]{R'}};$$

telle est l'équation qu'il fallait trouver.

Elle se vérifie, par exemple, en plaçant les points de contact M, N aux deux sommets d'une ellipse dont a et b sont les demi-axes; on a, en effet, alors

$$AM = a, \quad AN = b, \quad R = \frac{a^2}{b}, \quad R' = \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$\frac{R}{R'} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{\overline{AM}^3}{\overline{AN}^3},$$

conformément à l'équation ci-dessus.

Au reste, cette formule une fois obtenue peut être vérifiée facilement de diverses manières; mais on doit, ce me semble, attacher quelque prix à la démonstration que nous venons d'en donner et qui fait bien comprendre, par un exemple simple, l'utilité des considérations générales dont elle a été déduite.

Considérons à présent une portion quelconque MANBP...CQ de polygone circonscrit à une conique qu'elle touche successivement aux points M, N,.... Q. On verra sans peine (on n'a pour cela qu'à compo-

ser des rapports) qu'en nommant s, s',... les segments non contigus MA, NB,..., et t, t',... les autres segments AN, BP,..., aussi non contigus, les produits ss'... et tt'... sont entre eux comme les racines cubiques des rayons de courbure aux points extrêmes M, Q. Lorsque le polygone est fermé, ces deux points extrêmes coïncident, et le rapport des produits ss'..., tt'... devient égal à l'unité. De là une démonstration nouvelle et singulière du théorème qui concerne ces produits.

La formule

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt[3]{R}}{\sqrt[3]{R'}},$$

qui nous donne le rapport des deux tangentes AM, AN menées du point A à la conique, en fournit une autre plus simple encore. Par les points de contact M et N menons deux normales à la courbe, et soient n et n' les longueurs de ces normales terminées à un des axes principaux. On a, comme on sait,

$$\frac{R}{R'} = \frac{n^2}{n'^2}.$$

Donc

$$\frac{AM}{AN} = \frac{n}{n'};$$

par suite, dans le polygone circonscrit non fermé dont on a parlé plus haut, le rapport des produits ss'..., tt'... est égal au rapport des normales aux points extrêmes.

SUR LA THÉORIE DES TRANSCENDANTES A DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES;

PAR M. HERMITE.

(Extrait d'une Lettre à M. LIOUVILLE. — *Comptes rendus*, tome XVIII.)

J'ai essayé d'introduire, dans l'analyse des transcendantes à différentielles algébriques quelconques, des fonctions inverses de plusieurs variables, à l'exemple de ce qui a été fait par M. Jacobi pour les fonctions abéliennes. Je vais passer rapidement en revue les principaux résultats que j'ai obtenus, en réservant les démonstrations et les développements accessoires pour un Mémoire que j'espère bientôt avoir l'honneur de présenter à l'Académie.

I.

En suivant la marche tracée par M. Jacobi, dans le célèbre Mémoire intitulé : *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis*, j'ai été conduit d'abord à rechercher le système d'équations différentielles ordinaires dont les intégrales complètes sont données par le théorème d'Abel, considéré dans toute son étendue. Cette recherche, au reste, était assez facile en s'aidant des résultats consignés par Abel lui-même dans le Mémoire couronné par l'Académie des Sciences [*].

Soit, en suivant les notations d'Abel,

$$\chi(y) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0$$

[*] Tome VII des *Savants étrangers*. Voyez aussi un élégant Mémoire de M. Minding, publié dans le Journal de M. Crelle, tome XXIII.

une équation algébrique quelconque irréductible, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières d'une même variable x.

Nommons ses racines

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, \quad y_n,$$

et désignons par

$$(1) \qquad f(x, y) = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \ldots + t_{n-2} y^{n-2}$$

une fonction rationnelle et entière de x et y, dans laquelle le degré d'un coefficient quelconque t_m soit pris égal au nombre entier immédiatement inférieur à la somme, diminuée d'une unité, des $n - m - 1$ plus grands exposants des développements de chaque racine y suivant les puissances descendantes de x.

Soit enfin γ le nombre des coefficients arbitraires contenus dans $f(x, y)$; cette fonction sera susceptible d'un nombre γ de formes différentes que je représenterai par

$$f_1(x, y), \quad f_2(x, y), \ldots \quad f_\gamma(x, y).$$

Cela posé, en désignant par

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_\mu$$

des variables en nombre quelconque μ plus grand que γ, et par

$$y_{(1)}, \quad y_{(2)}, \ldots, \quad y_{(\mu)}$$

des fonctions irrationnelles choisies arbitrairement parmi les n racines

$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_n,$$

on aura, au moyen du théorème d'Abel, sous forme algébrique, les intégrales complètes du système des équations

$$\begin{aligned}
&\frac{f_1(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} dx_1 + \frac{f_1(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} dx_2 + \ldots + \frac{f_1(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})} dx_\mu = 0,\\
&\frac{f_2(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} dx_1 + \frac{f_2(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} dx_2 + \ldots + \frac{f_2(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})} dx_\mu = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{f_\gamma(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} dx_1 + \frac{f_\gamma(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} dx_2 + \ldots + \frac{f_\gamma(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})} dx_\mu = 0.
\end{aligned}$$

Il est inutile de dire que, dans chacune des racines $y_{(1)}$ ou $y_{(2)}$, etc., on remplace la quantité x par la variable x_1 ou x_2, etc., du terme où elle entre.

II.

D'après cela, je prendrai pour fonctions inverses les quantités

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_\gamma,$$

définies par les γ équations suivantes

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma}\int_0^{x_k}\frac{f_1(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\,dx_k = u_1, & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma}\int_0^{x_k}\frac{f_2(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\,dx_k = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma}\int_0^{x_k}\frac{f_\gamma(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\,dx_k = u_\gamma; \end{array}\right.$$

et je poserai, en conséquence,

$$x_1 = \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma), \quad x_2 = \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma), \quad x_\gamma = \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma).$$

Cela étant, les intégrales du système d'équations différentielles considéré plus haut, intégrales fournies immédiatement par le théorème d'Abel, donnent sans difficulté, par un changement convenable de constantes, le théorème fondamental, qui consiste en ce que les γ fonctions

$$\lambda_k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_\gamma + v_\gamma)$$

sont les racines d'une équation de degré γ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des diverses fonctions

$$\lambda_k(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),$$
$$\lambda_k(v_1, v_2, \ldots, v_\gamma),$$

et des valeurs correspondantes de celles des racines y que l'on a fait entrer dans les équations (2).

III.

De là découle cette propriété importante des fonctions inverses, qui consiste dans la coexistence d'une série d'indices de périodicité pour tous les arguments, et qui montre toute l'étendue de ce caractère singulier, dont un admirable Mémoire de M. Jacobi a révélé depuis longtemps l'existence dans les fonctions abéliennes. Considérons l'équation

$$\chi'(y_1)\chi'(y_2)\chi'(y_3)\ldots\chi'(y_n) = 0,$$

dont le premier membre, comme on sait, s'exprime par une fonction entière de x. Chacune de ses racines jouit de la propriété de rendre égales deux des racines y de l'équation

$$\chi(y) = 0.$$

Supposons donc que $y_{(1)}$ devienne égale à une autre racine $y_{[1]}$ pour les diverses valeurs

$$x = \alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1, \ldots, \alpha_1^{(n_1)};$$

de même que

$$y_{(2)} = y_{[2]}$$

pour

$$x = \alpha'_2, \alpha''_2, \alpha'''_2, \ldots, \alpha_2^{(n_2)},$$

et

$$y_{(3)} = y_{[3]}$$

pour

$$x = \alpha'_3, \alpha''_3, \alpha'''_3, \ldots, \alpha_3^{(n_3)},$$

et ainsi de suite.

Faisons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{f_k(x, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} - \frac{f_k(x, y_{[1]})}{\chi'(y_{[1]})} = (k, 1),$$
$$\frac{f_k(x, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} - \frac{f_k(x, y_{[2]})}{\chi'(y_{[2]})} = (k, 2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{f_k(x, y_{(\gamma)})}{\chi'(y_{(\gamma)})} - \frac{f_k(x, y_{[\gamma]})}{\chi'(y_{[\gamma]})} = (k, \gamma);$$

et désignons par les lettres m des nombres entiers positifs ou négatifs. Si l'on pose

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=1}^{n=n_1-1} m_1^{(n)} \int_{\alpha_1^{(n)}}^{\alpha_1^{(n+1)}} (k, 1)\, dx + \sum_{n=1}^{n=n_2-1} m_2^{(n)} \int_{\alpha_2^{(n)}}^{\alpha_2^{(n+1)}} (k, 2)\, dx + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \sum_{n=1}^{n=n_\gamma-1} m_\gamma^{(n)} \int_{\alpha_\gamma^{(n)}}^{\alpha_\gamma^{(n+1)}} (k, \gamma)\, dx,$$

on aura ce théorème :

« Une fonction rationnelle et symétrique quelconque des γ fonctions » inverses conservera la même valeur en ajoutant simultanément aux » divers arguments

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_\gamma$$

» les quantités constantes

$$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots, \mathrm{I}_\gamma. \text{ »}$$

Par une autre méthode, indépendante du théorème sur l'addition des arguments, mais qu'il serait trop long d'indiquer ici, on obtient directement les égalités

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 (u_1 + \mathrm{I}_1, u_2 + \mathrm{I}_2, \ldots, u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) = \lambda_1 (u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),\\
&\lambda_2 (u_1 + \mathrm{I}_1, u_2 + \mathrm{I}_2, \ldots, u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) = \lambda_2 (u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_\gamma (u_1 + \mathrm{I}_1, u_2 + \mathrm{I}_2, \ldots, u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) = \lambda_\gamma (u_1, u_2, \ldots, u_\gamma).
\end{aligned}$$

IV.

Les racines de l'équation

$$\chi'(y_1)\, \chi'(y_2) \cdots \chi'(y_n) = 0,$$

qui se sont présentées comme limites des intégrales qui entrent dans l'expression des indices de périodicité, jouissent de la propriété générale d'être des valeurs maxima ou minima des fonctions inverses. Cela ré-

sulte des expressions de leurs différences partielles que je vais rapporter.

Soit

$$(3)\qquad F(x, y) = \mu_1 f_1(x, y) + \mu_2 f_2(x, y) + \ldots + \mu_\gamma f_\gamma(x, y);$$

concevons qu'on détermine les constantes μ par les $\gamma - 1$ conditions

$$F(x_2, y_{(2)}) = 0, \quad F(x_3, y_{(3)}) = 0, \ldots, \quad F(x_\gamma, y_{(\gamma)}) = 0.$$

Nommons $F_1(x, y)$ ce que devient alors l'expression (3); les équations (2) donneront sans peine

$$\frac{dx_1}{du_1} = \frac{\mu_1 \chi'(y_{(1)})}{F_1(x_1, y_{(1)})}, \quad \frac{dx_1}{du_2} = \frac{\mu_2 \chi'(y_{(1)})}{F_1(x_1, y_{(1)})}, \ldots, \quad \frac{dx_1}{du_\gamma} = \frac{\mu_\gamma \chi'(y_{(1)})}{F_1(x_1, y_{(1)})}.$$

De même, si l'on appelle $F_2(x, y)$ la fonction $F(x, y)$ déterminée par les conditions

$$F(x_1, y_{(1)}) = 0, \quad F(x_3, y_{(3)}) = 0, \ldots, \quad F(x_\gamma, y_{(\gamma)}) = 0,$$

on aura

$$\frac{dx_2}{du_1} = \frac{\mu_1 \chi'(y_{(2)})}{F_2(x_2, y_{(2)})}, \quad \frac{dx_2}{du_2} = \frac{\mu_2 \chi'(y_{(2)})}{F_2(x_2, y_{(2)})}, \ldots, \quad \frac{dx_2}{du_\gamma} = \frac{\mu_\gamma \chi'(y_{(2)})}{F_2(x_2, y_{(2)})},$$

et ainsi de suite; d'où résulte la proposition énoncée.

De ce qui précède, on tire des équations linéaires aux différences partielles qui méritent d'être indiquées, savoir :

$$f_1(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_\gamma} = \chi'(y_{(1)}),$$

$$f_1(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_1} + f_2(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_\gamma} = \chi'(y_{(2)}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_1} + f_2(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_\gamma} = \chi'(y_{(\gamma)}).$$

Remarquons enfin cette conséquence, que l'équation

$$f_1(x, y) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(x, y) \frac{dx_1}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x, y) \frac{dx_1}{du_\gamma} = 0$$

étant satisfaite par

$$\begin{aligned} x &= x_2, \quad y = y_{(2)}, \\ x &= x_3, \quad y = y_{(3)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x &= x_\gamma, \quad y = y_{(\gamma)}, \end{aligned}$$

on peut, au moyen des différences partielles de l'une des fonctions inverses, déterminer algébriquement les $\gamma - 1$ autres.

V.

Le théorème relatif à l'addition des arguments conduit encore à exprimer les fonctions inverses dans toute leur généralité, au moyen des cas particuliers les plus simples, où l'on ne suppose successivement qu'un argument variable, les autres étant égaux à des constantes quelconques, à zéro par exemple.

Ce genre de réduction, qui est dû à M. Jacobi, se retrouve dans une autre partie de la théorie, comme on va le voir.

En nous bornant, pour plus de simplicité, aux fonctions de la première classe des transcendantes abéliennes, considérons la différentielle totale

$$\frac{F(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx + \frac{F(y)}{\sqrt{f(y)}}\,dy,$$

où $F(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, et $f(x)$ un polynôme du cinquième ou du sixième degré. Si l'on substitue aux variables x et y les variables u et v des fonctions inverses définies par les équations

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = u,$$

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{f(y)}} = v,$$

son intégrale étant désignée par

$$\Pi(u, v),$$

jouira, en vertu du théorème d'Abel, de la propriété exprimée par l'égalité

$$\Pi(u+u', v+v') = \Pi(u, v) + \Pi(u', v') + \text{une fonction algébrique et logarithmique};$$

en faisant

$$u = 0, \quad v' = 0,$$

on trouve

$$\Pi(u', v) = \Pi(0, v) + \Pi(u', 0) + \text{une fonct. algébr. et logarithm.}$$

Ainsi, la fonction $\Pi(u, v)$ à double argument est ramenée aux deux cas les plus simples, où l'on suppose successivement un seul argument variable; on voit encore qu'on n'aura plus à considérer que des intégrales de formules différentielles qui contiennent seulement une variable indépendante, à savoir, des intégrales, par rapport à u, de fonctions rationnelles et symétriques de

$$\lambda_1(u, 0), \quad \lambda_2(u, 0),$$

et des intégrales, par rapport à v, de fonctions rationnelles et symétriques de

$$\lambda_1(0, v), \quad \lambda_2(0, v).$$

On se convaincra facilement de la généralité des considérations précédentes : ainsi, dans le cas des fonctions de la seconde classe des transcendantes abéliennes, où s'offrent des fonctions à triple argument

$$\Pi(u, v, w),$$

on aura de même l'égalité

$$\Pi(u+u', v+v', w+w') = \Pi(u, v, w) + \Pi(u', v', w') + \text{une fonction algébrique et logarithmique},$$

ou bien encore la suivante

$$\Pi(u+u'+u'', v+v'+v'', w+w'+w'') = \Pi(u, v, w) + \Pi(u', v', w') + \Pi(u'', v'', w'') + \text{une fonct. algébr. et log.};$$

et, en faisant

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= 0, \\ u' &= 0, & w' &= 0, \\ v'' &= 0, & w'' &= 0, \end{aligned}$$

il vient

$$\Pi(u'', v', w) = \Pi(0, 0, w) + \Pi(0, v', 0)$$
$$+ \Pi(u'', 0, 0) + \text{une fonction algébr. et logarith..}$$

ce qui conduit aux mêmes conséquences que précédemment.

VI.

La méthode qui m'a donné la division des arguments dans les fonctions abéliennes, s'étend aux nouvelles transcendantes; mais, jusqu'à présent, je n'ai pu aborder la théorie de la transformation sans être arrêté par les plus grandes difficultés. Mes tentatives m'ont conduit, néanmoins, à quelques considérations sur cette théorie bornée aux fonctions elliptiques; je vais les rapporter en peu de mots.

Soient $\varphi(u, k)$, ou simplement $\varphi(u)$, la fonction inverse, définie par l'égalité

$$\varphi'(u) = \sqrt{[1 - \varphi^2(u)][1 - k^2\varphi^2(u)]} = \Delta(u, k).$$

2ω et $2\varpi\sqrt{-1}$ les indices de périodicité, et n un nombre impair quelconque. Le théorème fondamental, donné pour la première fois par M. Jacobi, consiste en ce que la fonction

$$z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) = \varphi(u) + \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right) + \ldots + \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right),$$

où l'une des périodes des fonctions elliptiques se trouve divisée par le nombre n, peut être représentée de la manière suivante :

$$\alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right).$$

λ désignant un nouveau module, a et α des constantes. On en déduit ensuite que toute fonction rationnelle et symétrique des quantités

$$\varphi(u), \quad \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \varphi\left(u + \frac{4\omega}{n}\right), \ldots, \quad \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

ou, de même, l'une des périodes des fonctions elliptiques subsiste, tandis que l'autre se trouve divisée par le nombre n, peut être représentée par une fonction rationnelle de $\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)$. Or, voici la démons-

tration du théorème de M. Jacobi, à laquelle je me suis trouvé conduit.

Il existe, entre $\frac{dz}{du}$ et z, une relation algébrique, qui s'obtiendra par l'élimination de $\varphi(u)$ entre les deux égalités

$$z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right), \quad \frac{dz}{du} = \sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right).$$

Soit, pour cela, $\varphi(u) = x$; z, comme on le voit aisément, se transforme en une fonction rationnelle $\frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$, U et V étant deux polynômes pairs du degré $n - 1$; on établit ensuite sans peine que les racines de l'équation

$$(4) \qquad z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$$

sont de la forme

$$\varphi(u) = \varphi(\varepsilon), \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{4\omega}{n}\right), \ldots, \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

Cela résulte, en effet, de ce que l'expression de z ne change point en augmentant u d'un multiple quelconque de $\frac{2\omega}{n}$.

Or, la même chose a lieu nécessairement dans la dérivée $\frac{dz}{du}$; et comme

$$z = \frac{x\mathrm{U}}{n},$$

on a

$$\frac{dz}{du} = \frac{\mathrm{V}\frac{d(x\mathrm{U})}{dx} - x\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}^2}\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}.$$

Ainsi, le carré de $\frac{dz}{du}$, qui est une fonction rationnelle de x, conservera la même valeur en y substituant successivement les diverses racines de l'équation (4); par suite, $\frac{dz}{du}$ s'exprimera par la racine carrée d'une fonction rationnelle de z.

Or, cette fonction sera entière, car

$$\sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$$

ne peut devenir infini sans que quelqu'une des quantités $\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$

ne le soit, ce qui rend dès lors z infini lui-même. Pour obtenir maintenant le nombre et la nature des valeurs de z qui donnent

$$\frac{dz}{du} = 0,$$

il faut chercher les racines de l'équation

$$\sum \Delta \left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) = 0.$$

On trouve très-facilement qu'elles sont comprises dans les deux formules

$$x^2 = \varphi^2 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{2p\omega}{n}\right), \quad x^2 = \varphi^2 \left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1} - \frac{2p\omega}{n}\right),$$

p devant être supposé successivement $0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Mais j'observe que pour les substituer dans l'expression de z, il est inutile d'avoir égard à ces diverses valeurs de p, de sorte qu'il reste seulement à considérer les racines

$$x^2 = \varphi^2 \left(\frac{\omega}{2}\right), \quad x^2 = \varphi^2 \left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}\right).$$

On voit, par là, que le polynôme en z, qui entre dans l'expression de $\frac{dz}{du}$, sera du quatrième degré, ne contiendra que des puissances paires de z, et s'évanouira pour les valeurs

$$z^2 = \left\{\sum \varphi \left(\frac{\omega}{2} - \frac{2p\omega}{n}\right)\right\}^2 = \alpha^2, \quad z^2 = \left\{\sum \varphi \left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1} - \frac{2p\omega}{n}\right)\right\}^2 = \beta^2.$$

Ainsi, l'on aura

$$\frac{dz}{du} = C\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\beta^2}\right)}.$$

C étant une constante qu'on détermine en observant que, pour $u = 0$ et par suite $z = 0$, on a

$$\frac{dz}{du} = C = \sum \Delta \left(\frac{2p\omega}{n}\right);$$

faisant donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lambda, \quad \frac{C}{\alpha} = a,$$

on a

$$z = \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right).$$

VII.

Il résulte, de ce qui précède, que l'équation

$$\alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) = \frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}}, \quad \text{ou} \quad x\mathrm{U} - \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)\mathrm{V} = 0,$$

a pour racines les n quantités

$$\varphi(u), \quad \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right), \ldots, \quad \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

Je vais faire voir qu'on peut tirer de là, directement, la transformation des fonctions de troisième espèce, sans établir préalablement, comme le fait M. Jacobi, la formule de transformation des fonctions de seconde espèce.

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{F}(x) = x\mathrm{U} - \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)\mathrm{V};$$

en désignant par m une quantité quelconque, on aura, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \sum \frac{1}{m - \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)},$$

ou bien encore

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \frac{1}{m - \varphi(u)} + \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{1}{m - \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)} + \frac{1}{m - \varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right)}\right].$$

Or, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{M}},$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}, \quad \mathrm{B} = \frac{(x\mathrm{U})}{\alpha\mathrm{V}}, \quad \mathrm{M} = \frac{x\mathrm{U}}{\alpha\mathrm{V}} \quad \text{pour} \quad x = m.$$

Il importe beaucoup de remarquer cette valeur de M qui, pour $m = \varphi(\mu, k)$, devient $\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)$; ainsi on a l'égalité

$$\frac{A\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) + B}{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} = \frac{1}{\varphi(u) - \varphi(\mu)} + \sum \left[\frac{1}{\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi(\mu)} + \frac{1}{\varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi(\mu)}\right].$$

d'où, en changeant le signe de μ,

$$\frac{A\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) + B}{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) + \varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} = \frac{1}{\varphi(u) + \varphi(\mu)} + \sum \left[\frac{1}{\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) + \varphi(\mu)} + \frac{1}{\varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) + \varphi(\mu)}\right];$$

puis, retranchant membre à membre,

$$\frac{A\varphi^2\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - B\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \varphi^2\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)}$$

$$= \frac{\varphi(\mu)}{\varphi^2(u) - \varphi^2(\mu)} + \varphi(\mu) \sum \left[\frac{1}{\varphi^2\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi^2(\mu)} + \frac{1}{\varphi^2\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi^2(\mu)}\right]$$

Soit maintenant

$$\Pi(x, \mu, k) = \int_0^x \frac{du}{\varphi^2(u, k) - \varphi^2(\mu, k)};$$

l'équation précédente donnera, en intégrant depuis $u = 0$ jusqu'à $u = x$, et en ayant égard aux valeurs des constantes,

$$\frac{\alpha\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)}{\Delta(\mu, k)} \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{\mu}{a}, \lambda\right) - Ax = \varphi(\mu)\Pi(x, \mu, k)$$

$$+ \varphi(\mu) \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\Pi\left(x + \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right) + \Pi\left(x - \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right)\right],$$

ou bien

$$\alpha\varphi\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Pi\left(\frac{x}{a},\frac{\mu}{a},\lambda\right)=\Delta(\mu,k)\,\mathrm{A}.x+\varphi(\mu,k)\,\Delta(\mu,k)\,\Pi(x,\mu,k)$$

$$+\varphi(\mu,k)\,\Delta(\mu,k)\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\Pi\left(x+\frac{2p\omega}{n},\mu,k\right)+\Pi\left(x-\frac{2p\omega}{n},\mu,k\right)\right].$$

Le second membre peut être ramené à ne contenir qu'une seule fonction de troisième espèce, avec une quantité logarithmique; on a, en effet, la formule

$$\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)-\varphi(x+a)}-\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)-\varphi(x-a)}=\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)-\varphi(\mu+a)}-\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)-\varphi(\mu-a)},$$

qu'il est facile de vérifier; elle donne, en changeant μ en $-\mu$,

$$\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)+\varphi(x+a)}-\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)+\varphi(x-a)}=\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)+\varphi(\mu+a)}-\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)+\varphi(\mu-a)}.$$

Ajoutant membre à membre et intégrant depuis $x=0$, on trouve sans peine,

$$\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)\left[\Pi(x-a,\mu)-\Pi(x+a,\mu)\right]=-2\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)\,\Pi(a,\mu)$$
$$+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(\mu+a)}}{1-\dfrac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(\mu-a)}}\right\},$$

d'où, en permutant a et x, et changeant les signes des deux membres,

$$\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)\left[\Pi(x+a,\mu)+\Pi(x-a,\mu)\right]=2\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)\,\Pi(x,\mu)$$
$$-\frac{1}{2}\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2(a)}{\varphi^2(\mu+x)}}{1-\dfrac{\varphi^2(a)}{\varphi^2(\mu-x)}}\right\}.$$

On arrive donc définitivement à la formule suivante, pour la transformation des fonctions de troisième espèce :

$$\alpha\varphi\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Pi\left(\frac{x}{a},\frac{\mu}{a},\lambda\right)=\Delta(\mu,k)\,\mathrm{A}.x+n\varphi(\mu,k)\,\Delta(\mu,k)\,\Pi(x,\mu,k)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{2p\omega}{n}\right)}{\varphi^2(\mu+x)}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{2p\omega}{n}\right)}{\varphi^2(\mu-x)}}\right\}.$$

VIII.

Dès les premiers pas qui ont été faits dans la théorie des fonctions elliptiques, on a imaginé de les différentier par rapport au module, ce qui a conduit à plusieurs résultats importants. Or, le même moyen analytique s'applique avec facilité à toutes les fonctions de la forme

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où y est donné par l'équation

$$\chi(y) = y^n - X = 0,$$

X étant une fonction entière de x.

Voici, par exemple, le théorème qui en résulte pour les fonctions abéliennes.

Soit

$$F(x) = x(x-a)\ldots(x-k)$$

un polynôme du degré $2m+1$; on pourra représenter toutes les fonctions abéliennes de première et de seconde espèce par l'intégrale

$$z = \int_0^x \frac{(x-a)^k dx}{\sqrt{F(x)}},$$

et en considérant z comme une fonction du module a, on obtient l'équation linéaire de l'ordre $2m$

$$0 = \frac{2\sqrt{F(x)}}{(x-a)^{2m-k}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=2m+1} \frac{(4m-n-2k)}{1.2.3\ldots n} \cdot F^{(n)}(a) \cdot \frac{(-2)^{2m-n+1}}{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k+2n-4m-1)} \cdot \frac{d^{2m-n+1} z}{da^{2m-n+1}}.$$

Lorsque k est compris entre 0 et $m-1$, de sorte que z représente les transcendantes de première espèce, l'intégrale complète s'obtient en ajoutant à la fonction

$$\int_0^x \frac{(x-a)^k dx}{\sqrt{F(x)}}$$

les diverses intégrales définies qui entrent dans l'expression des indices de périodicité de la fonction inverse, multipliées chacune par une constante arbitraire.

De là résulteraient facilement, entre autres choses, des théorèmes analogues à l'équation de Legendre entre les fonctions elliptiques completes de première et de seconde espèce, à modules complémentaires; relation déjà généralisée par divers géomètres [*]. Mais je ne veux pas m'étendre plus longuement sur ce sujet, qui, du reste, donne lieu à de nombreuses conséquences, que je développerai dans une autre occasion.

---

[*] Voyez, par exemple, un Mémoire de M. Catalan, couronné par l'Académie de Bruxelles.

SUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES PLANÉTAIRES;

PAR M. ABEL TRANSON.

Soient, à l'origine du mouvement, l la distance de la planète au soleil, V la vitesse et θ l'angle que fait cette vitesse avec le rayon vecteur.

Je vais montrer qu'on peut, à l'aide de ces circonstances initiales, et sans avoir recours à l'équation générale du mouvement, déterminer la forme et la situation de l'orbite.

C'est-à-dire, il s'agira de déterminer : 1° le paramètre ou rayon de courbure au sommet du grand axe, $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$; 2° l'excentricité e; 3° l'angle ω que fait le grand axe de l'orbite avec le rayon vecteur.

1°. Soient $A = a(1 \mp e)$ la distance relative à l'une ou l'autre des absides, et U la vitesse correspondante. Le *principe des aires* donne la relation

$$AU = Vl \sin \theta.$$

En même temps, parce que la force centrifuge aux absides est exactement égale à la force centrale, on a

$$A^2 U^2 = p.\mu,$$

d'où l'on tire immédiatement, pour la valeur du paramètre,

$$p = \frac{V^2 l^2 \sin^2 \theta}{\mu}.$$

On pourrait dire aussi qu'au lieu initial de la planète la force centrale décomposée normalement à la courbe est égale à la force centrifuge, ce qui donnerait

$$\frac{\mu}{l^2} \sin \theta = \frac{V^2}{\rho},$$

en appelant ρ le rayon de courbure au lieu initial; et si l'on a égard à la relation

$$p = \rho \sin^3 \theta,$$

on retrouve l'expression ci-dessus.

2°. Pour obtenir une seconde équation, il faut avoir recours au *principe des forces vives*. La vitesse U relative à la distance A de l'abside ne dépend que de cette distance et non de la forme intermédiaire de l'orbite. C'est-à-dire, par exemple, que cette vitesse serait la même à la même distance A si l'angle initial θ avait été nul, c'est-à-dire si la planète avait été mue directement dans le sens du soleil. En un mot, l'équation de la force vive étant

$$d.v^2 = -\frac{2\mu\, dr}{r^2},$$

on en tire

$$(\alpha) \qquad v^2 - V^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right).$$

Et aux absides en particulier,

$$U^2 - V^2 = 2\mu\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{l}\right).$$

Si l'on multiplie cette équation par A^2, et si l'on a égard à la valeur ci-dessus de $A^2 U^2$, il vient

$$(\beta) \qquad A^2\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right) + 2\mu A = p\mu,$$

d'où l'on tire pour A une double valeur (à cause des deux absides) représentée par

$$A = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + p\mu\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right)}}{v^2 - \frac{2\mu}{e}};$$

d'ailleurs, en tirant de (β) la valeur de

$$\frac{p}{A} = 2 + \frac{A}{\mu}\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right),$$

et ayant égard à ce que

$$\frac{p}{A} = 1 \pm e,$$

il vient

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{\mu}\left(V^2 - \frac{2\mu}{e}\right)} = \sqrt{1 + V^2 l^2 \sin^2 \theta \left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right)}.$$

De là toutes les conséquences connues. Si la force est répulsive, il faut changer dans la formule ci-dessus le signe de μ; la trajectoire est donc alors une hyperbole, ou plus exactement une branche d'hyperbole tournant sa convexité vers le centre d'action. Si, au contraire, la force est attractive, la trajectoire peut être l'une des trois coniques, et cela ne dépend pas de la direction initiale, mais uniquement du signe de $V^2 - \frac{2\mu}{l}$, ou bien du signe de $V^2 - u^2$, en appelant u la vitesse que le mobile aurait acquise en tombant vers le centre d'action, depuis l'infini jusqu'à la distance l avec une vitesse initiale nulle. Enfin, comme le demi-grand axe est égal à $\frac{p}{1 - e^2}$, on trouve pour sa valeur

$$a = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{l} - V^2}$$

laquelle ne dépend pas non plus de la valeur initiale de l'angle θ.

Quant à l'angle ω qui détermine la situation du grand axe, maintenant qu'on a la forme particulière de l'orbite, c'est une question à résoudre par la géométrie des sections coniques.

Si l'on réunit aux considérations précédentes l'emploi de la méthode élémentaire et purement géométrique pour la détermination de la nature des orbites, qui a été présentée dans ce même Journal (tome Ier, page 191) [*], on voit qu'on peut dégager en quelque sorte de tout

[*] Depuis cette époque, j'ai reconnu que la valeur du rayon de courbure des sections coniques, que j'avais donnée dans cette Note, aussi bien que son usage pour déterminer la loi de la force centrale, était consignée dans le commentaire des PP. Leseur et Jacquier, de l'ordre des Minimes, sur le livre de Newton

calcul la question des planètes et n'y laisser en saillie que l'application des principes fondamentaux de la dynamique d'un point matériel.

J'ajoute en terminant que, si à chaque point M de l'orbite on cherche sur le rayon vecteur le point N d'où la planète aurait dû tomber vers le soleil pour, en partant d'une vitesse initiale nulle, acquérir, en arrivant à l'orbite, la vitesse qu'elle y possède, on trouvera que le lieu des points N est le cercle décrit du foyer d'attraction comme centre avec un rayon égal au grand axe $2a$; résultat qui donne ainsi, en mécanique, une signification intéressante à ce cercle qui déjà, en géométrie, est doué, par rapport à la conique, de propriétés si nombreuses [*].

---

[*] Dans la dernière édition de son excellent *Traité de Géométrie*, M. le professeur Vincent annonce qu'il fait, dans son enseignement, un très-grand emploi de la considération de ce cercle, et qu'il lui a attribué depuis très-longtemps la dénomination parfaitement appropriée de *cercle directeur*.

NOTE

Sur la détermination de la surface moyenne d'un rectangle dont les côtés peuvent varier entre des limites données;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Pour l'intelligence de cette Note, nous supposerons tout de suite un cas très-simple, savoir, celui où les deux côtés du rectangle ont pour limites a et b, a étant $> b$. Posons $a - b = n\varepsilon$, n étant un nombre entier arbitraire, que l'on choisira au besoin assez grand pour que ε devienne moindre que toute quantité donnée. Ne considérons, pour un moment, que les rectangles dont la surface est représentée par un produit de la forme $(b + i\varepsilon)(b + i'\varepsilon)$, où i et i' sont des nombres entiers pouvant prendre les valeurs de la série $0, 1, 2, \ldots, n$. Il est aisé de voir qu'on aura tous les produits différents de cette forme en assignant à i' pour chaque valeur de i, celles de la suite $i, i+1, i+2, \ldots, n$, de sorte que leur somme sera donnée par l'expression

$$\mathbf{S}_0^n (b + i\varepsilon) \mathbf{S}_i^n (b + i\varepsilon),$$

où le signe $\mathbf{S}$ a la signification ordinaire que lui attribue le calcul aux différences finies. Quant au nombre de ces produits, il est évidemment donné par la formule $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Donc si l'on appelle Ω_ε la moyenne cherchée, c'est-à-dire la somme des surfaces des rectangles divisée par leur nombre, on aura

$$\Omega_\varepsilon = \frac{\mathbf{S}_0^n (b + i\varepsilon) \mathbf{S}_i^n (b + i\varepsilon)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{2\mathbf{S}_0^n (b + i\varepsilon)\varepsilon \mathbf{S}_i^n (b + i\varepsilon)\varepsilon}{(n\varepsilon)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)}.$$

Attribuons maintenant à ε des valeurs indéfiniment décroissantes correspondant à des valeurs de plus en plus grandes du nombre n, la moyenne Ω_ε deviendra celle de toutes les superficies possibles comprises entre a^2 et b^2. Désignons-la par Ω_0, et posons $i\varepsilon = x$, $\varepsilon = dx$, les sommes indiquées se convertissent en intégrales définies ayant pour limites 0, x, $a-b$, correspondant respectivement à 0, i, n, et l'on a la nouvelle expression

$$\Omega_0 = \frac{2\int_0^{a-b}(b+x)\,dx\int_x^{(a-b)}(b+x)\,dx}{(a-b)^2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Nota. Il ne faut pas perdre de vue que, dans ces formules, le premier signe de sommation ou d'intégration régit le signe suivant, comme cela a lieu dans le cas de deux variables.

2. Le calcul qui précède est la conséquence de la supposition que chacun des côtés du rectangle peut prendre toutes les valeurs possibles entre les limites a, b. Or, cette supposition peut être restreinte dans sa généralité; tel serait le cas, par exemple, où le plus petit côté du rectangle ne devrait point être inférieur à une fraction déterminée du plus grand. Soit p cette fraction. Après avoir opéré, comme ci-dessus, par voie de dénombrement et de sommation de tous les produits différents, tels que $(b+i\varepsilon)(b+i'\varepsilon)$, puis retranché des résultats obtenus respectivement le nombre et la somme de ceux qui ne satisfont pas à la double inégalité

$$\frac{b+i'\varepsilon}{b+i\varepsilon} - \frac{1}{p} < 0, \quad i < i',$$

le quotient de la division des deux restes donne la moyenne cherchée. On est ainsi conduit à la formule

$$\Omega_p = 2\,\frac{\int_0^{a-b}(b+x)\,dx\int_x^{a-b}(b+x)\,dx - \int_0^{pa-b}(b+x)\,dx\int_{\frac{b+x}{p}-b}^{pa-b}(b+x)\,dx}{\left(\frac{1-p}{p}\right)(pa^2-b^2)}$$

$$= \frac{1}{4}(1+p)\left(a^2+\frac{b^2}{p}\right),$$

où Ω_p est cette moyenne analogue à Ω_0. Elle varie avec la valeur de la fraction p, mais il est évident qu'elle ne saurait en dépendre si l'on a

$$p = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad > \frac{b}{a};$$

effectivement on reconnaît qu'en faisant $p = \frac{b}{a}$, Ω_p se réduit à $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

3. Le même procédé serait applicable à toute autre relation exprimée par une ou plusieurs inégalités telles que $\varphi(b + i\varepsilon, b + i'\varepsilon) < 0$, φ étant un signe de fonction. Mais les calculs devenant compliqués et laborieux, je vais exposer un moyen plus simple d'arriver au but.

Soit fait $b + i\varepsilon = x$, $b + i'\varepsilon = y$, et $z = xy$, cette dernière relation pourra être interprétée géométriquement, en regardant x, y et z comme trois coordonnées rectangulaires; alors $z = xy$ représente un paraboloïde hyperbolique, et la moyenne cherchée porte sur un certain nombre de valeurs de z tant que ε conserve une valeur finie. De plus, on se convaincra sans peine, avec un peu d'attention, que chacune de ces ordonnées peut être considérée comme l'axe ou plutôt l'un des côtés d'un prisme carré ayant ε pour côté de la base. Or, à cause de la petitesse de ε, le volume de chacun de ces prismes est proportionnel à la valeur de z qui lui correspond comme axe ou comme côté; donc la moyenne cherchée n'est autre chose que la somme des volumes des prismes divisée par la somme des bases. Celles-ci, d'ailleurs, forment évidemment la surface terminée sur le plan des xy par un contour polygonal composé de lignes droites ou courbes représentées par les équations telles que $\varphi(x, y) = 0$, servant de limites aux inégalités $\varphi(x, y) < 0$. De là l'expression analytique très-simple de la moyenne Ω.

$$\Omega = \frac{\int\int z\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy} = \frac{\int\int xy\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}.$$

4. Il est nécessaire, dans quelques applications relatives à l'art de l'ingénieur et en vue desquelles ces recherches ont été faites, de considérer chaque rectangle comme entouré d'une bande de largeur uniforme j que l'on appelle un *joint*. D'après ce qui vient d'être dit, on tiendra compte du joint en le regardant comme compris dans les longueurs

x, y, c'est-à-dire en supposant que chaque rectangle s'étend jusqu'à l'axe du *joint* qui l'entoure. Dans ce cas, il faudra remplacer chaque équation *limite* $\varphi(x, y) = 0$ par $\varphi(x - j, y - j) = 0$.

Toutefois, on peut ne pas changer ces équations, et rectifier seulement la valeur de Ω où x et y deviendront respectivement $x + j$, $y + j$, ce qui donne

$$\Omega = \frac{\int\int (x+j)(y+j)\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy} = \frac{\int\int xy\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy} + j\frac{\int\int (x+y)\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy} + j^2,$$

les deux derniers termes formant la portion de Ω due à l'influence du *joint* seul.

5. Les deux premiers termes de la valeur ci-dessus de Ω sont susceptibles d'interprétations assez remarquables.

En premier lieu, le coefficient de j n'est autre chose que le double de la distance du centre de gravité de la figure à laquelle s'applique l'intégrale $\int\int dx\,dy$, à chacun des axes.

En second lieu, il n'est pas difficile de reconnaître, dans l'expression $\frac{\int\int xy\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}$, la distance du centre de pression de la même figure à l'un des axes multipliée par la distance de son centre de gravité à l'autre axe, ce dernier marquant le niveau d'un liquide pesant dans lequel elle serait plongée.

PROBLÈMES
SUR LES DÉVELOPPÉES ET LES DÉVELOPPANTES
DES COURBES PLANES;

PAR M. PUISEUX.

PREMIÈRE PARTIE.

La cycloïde et la spirale logarithmique possèdent, comme on sait, la propriété de se reproduire dans leurs développées : on peut se demander si d'autres courbes n'en jouiraient pas également. On peut aussi considérer non-seulement la développée d'une courbe, mais la développée de cette développée, et ainsi de suite, et chercher si, dans cette série de courbes, il en est une que l'on puisse faire coïncider avec la courbe primitive, auquel cas les suivantes reproduiront périodiquement celles qui les précèdent. Enfin la question deviendra plus générale encore, si au lieu d'exiger que l'une de ces développées successives soit égale à la courbe d'où l'on est parti, on veut seulement qu'elle lui soit semblable. Nous nous proposerons donc, dans cette première partie, de trouver une courbe qui soit semblable à sa $n^{ème}$ développée [*].

Je remarquerai d'abord qu'il peut y avoir, entre deux figures situées dans le même plan, deux sortes d'égalités que j'appellerai égalité *directe* ou *inverse*, selon que pour faire coïncider les deux figures, il suffira de déplacer l'une d'elles dans son plan ou qu'il sera nécessaire de la retourner *sens dessus dessous* : de même, deux figures semblables pourront l'être *directement* ou *inversement*.

[*] Dans une Note insérée au tome VI de ce Journal (page 61), M. J. Binet annonce la solution d'un cas particulier du problème que je traite ici. Mon travail était presque entièrement terminé lorsque j'ai eu connaissance de cet article.

Or, la forme et la grandeur d'une courbe sont complétement déterminées lorsqu'on donne une relation $r = f(u)$ entre le rayon de courbure r d'un quelconque de ses points et l'angle u que ce rayon fait avec une direction fixe. L'équation d'une courbe directement égale à celle-là n'en pourra différer qu'en ce que l'angle u y sera augmenté d'une constante l, à moins qu'on ne veuille regarder comme négatifs dans la seconde les rayons vecteurs qui sont positifs dans la première, auquel cas r se changerait en $-r$; ainsi

$$r = \pm f(l + u):$$

telle est l'équation des courbes directement égales à la première. Mais pour obtenir l'équation des courbes qui lui sont inversement égales, il faudra changer u en $l - u$, et l'on aura

$$r = \pm f(l - u).$$

De même, une courbe dont les dimensions sont à celles de la courbe $r = f(u)$ dans le rapport de a à l'unité, aura pour équation

$$r = \pm af(l + u), \quad \text{ou} \quad r = \pm af(l - u),$$

suivant qu'elle lui sera directement ou inversement semblable.

Cela posé, par le point (r, u) d'une courbe traçons-lui une normale; par le point (r_1, u_1) où cette droite touche la développée, menons à celle-ci une normale; cette normale touchera le seconde développée en un point (r_2, u_2) par lequel nous mènerons encore une normale à cette dernière courbe, et ainsi de suite. On aura

$$u_1 = u + \frac{\pi}{2}, \quad u_2 = u_1 + \frac{\pi}{2}, \ldots, \quad u_n = u_{n-1} + \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$du = du_1 = du_2 = \ldots = du_n.$$

Si l'on remarque, de plus, que les arcs des développées successives ont pour différentielles dr, dr_1, dr_2, etc., on trouvera

$$r_1 = \pm \frac{dr}{du}, \quad r_2 = \pm \frac{dr_1}{du}, \ldots, \quad r_n = \pm \frac{dr_{n-1}}{du},$$

et par conséquent

$$r_n = \pm \frac{d^n r}{du^n}.$$

Si donc $r = f(u)$ est l'équation d'une courbe, on aura pour sa $n^{ième}$ développée

$$r_n = \pm f^{(n)}(u) = \pm f^{(n)}\left(u_n - \frac{n\pi}{2}\right),$$

et ces deux courbes seront directement semblables lorsqu'on aura

$$f^{(n)}\left(u_n - \frac{n\pi}{2}\right) = \pm a f(l + u_n),$$

inversement semblables lorsqu'on aura

$$f^{(n)}\left(u_n - \frac{n\pi}{2}\right) = \mp a f(l - u_n).$$

Ces deux équations, dans lesquelles il est permis de supposer a positif, peuvent s'écrire plus simplement

$$(1) \qquad f^{(n)}(u) = \pm a f(h + u),$$

$$(2) \qquad f^{(n)}(u) = \pm a f(h - u),$$

h désignant une nouvelle constante. Elles sont, comme on voit, aux différences mêlées, et il s'agit de les intégrer. Observons que si une courbe composée de deux branches symétriques par rapport à une droite répond à une de ces équations, elle satisfera en même temps à l'autre, car elle sera à la fois directement et inversement semblable à sa développée.

Considérons d'abord l'équation (2); en la différentiant n fois de suite, on trouve

$$f^{(2n)}(u) = \pm (-1)^n a f^{(n)}(h - u);$$

mais si l'on y remplace u par $h - u$, elle devient

$$f^{(n)}(h - u) = \pm a f(u).$$

Multipliant en croix ces deux dernières équations, nous obtiendrons l'équation différentielle linéaire

$$(3) \qquad f^{(2n)}(u) = (-1)^n a^2 f(u).$$

La valeur de $f(u)$ qui la vérifie est la somme de $2n$ termes de la forme Ae^{mu}, A étant une constante arbitraire, et m l'une des racines de l'équation

$$m^{2n} = (-1)^n a^2. \tag{4}$$

Je nomme b la valeur arithmétique de $a^{\frac{1}{n}}$; les racines de l'équation (4) seront données par la formule

$$m = \pm b\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)\right],$$

où l'on doit faire successivement $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, si n est pair, $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, si n est impair.

Dans le premier cas, les valeurs de m qui répondent à $k = \frac{n}{2}$ sont réelles et égales à $\pm b$; la valeur de $f(u)$, donnée par l'équation (3), contient donc une partie telle que $Ae^{bu} + Be^{-bu}$. Mais la somme de ces deux termes devant vérifier l'équation (2), il faudra qu'on ait

$$Ab^n e^{bu} + Bb^n e^{-bu} = \pm a(Ae^{bh} e^{-bu} + Be^{-bh} e^{bu}),$$

et par conséquent

$$A = \pm Be^{-bh}, \quad B = \pm Ae^{bh}.$$

De ces deux équations qui n'en font qu'une seule, on conclut que la valeur cherchée de $f(u)$ renferme, lorsque n est pair, la partie

$$A[e^{bu} \pm e^{b(h-u)}].$$

Que n soit pair ou impair, on aura toujours, pour $k = 0$,

$$m = \pm b\sqrt{-1};$$

il en résulte, dans $f(u)$, la partie

$$Ce^{bu\sqrt{-1}} + De^{-bu\sqrt{-1}},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$E\sin(bu + \delta);$$

mais l'équation (2) devant être vérifiée, on aura

$$\mathrm{E}\, b^n \sin\left(bu + \delta + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm\, a\mathrm{E} \sin(-\, bu + bh + \delta),$$

ou bien

$$\cos\left(\delta + \frac{n\pi}{2}\right) = \mp \cos(bh + \delta), \quad \sin\left(\delta + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm \sin(bh + \delta),$$

et par suite

$$\delta = -\frac{bh}{2} - \frac{(n - 1 \mp 1)\pi}{4}.$$

La valeur cherchée de $f(u)$ contiendra donc le terme

$$\mathrm{E} \sin\left[bu - \frac{ba}{2} - \frac{(n - 1 \mp 1)\pi}{4}\right].$$

A chaque valeur de k autre que o ou $\frac{n}{2}$, répondent quatre valeurs de m, savoir :

$$\begin{array}{ll} b(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha), & b(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha). \\ -\,b(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha), & -\,b(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha), \end{array}$$

en désignant, pour abréger, par α l'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}$, lequel est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Aux deux premières de ces valeurs répond, dans $f(u)$, le terme

$$\mathrm{F}e^{bu\cos\alpha} \sin(bu \sin\alpha + \varepsilon),$$

et aux deux dernières, le terme

$$\mathrm{G}e^{-bu\cos\alpha} \sin(bu \sin\alpha + \zeta);$$

mais la somme de ces deux expressions doit vérifier l'équation (2), ce qui exige que l'on ait

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}\dfrac{d^n.e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha + \varepsilon)}{du^n} + \mathrm{G}\dfrac{d^n.e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha + \zeta)}{du^n} \\ = \pm\, a\mathrm{F}e^{b(h-u)\cos\alpha}\sin(-\,bu\sin\alpha + bh\sin\alpha + \varepsilon) \\ \pm\, a\mathrm{G}e^{b(u-h)\cos\alpha}\sin(-\,bu\sin\alpha + bh\sin\alpha + \zeta). \end{array} \right.$$

Pour former les dérivées de l'ordre n qui se trouvent dans le premier membre, je différentie n fois de suite par rapport à u l'équation identique

$$e^{bu\cos\alpha}\left[\cos(bu\sin\alpha+\varepsilon)+\sqrt{-1}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)\right]$$
$$=e^{\varepsilon\sqrt{-1}}.\,e^{bu(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)},$$

ce qui donne

$$\frac{d^n.e^{bu\cos\alpha}\left[\cos(bu\sin\alpha+\varepsilon)+\sqrt{-1}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)\right]}{du^n}$$
$$=b^n e^{\varepsilon\sqrt{-1}}(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^n e^{bu(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)};$$

j'égale les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres, et je trouve

$$\frac{d^n.e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)}{du^n}=b^n e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+n\alpha+\varepsilon),$$

puis, en changeant b en $-b$, ε en $-\zeta$,

$$\frac{d^n.e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+\zeta)}{du^n}=(-1)^n b^n e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha-n\alpha+\zeta).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5), on verra que pour qu'elle soit vérifiée, il faut que les constantes F, G, ε, ζ remplissent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
F\cos(n\alpha+\varepsilon)&=\mp Ge^{-bh\cos\alpha}\cos(bh\sin\alpha+\zeta),\\
F\sin(n\alpha+\varepsilon)&=\pm Ge^{-bh\cos\alpha}\sin(bh\sin\alpha+\zeta),\\
(-1)^n G\cos(n\alpha-\zeta)&=\mp Fe^{bh\cos\alpha}\cos(bh\sin\alpha+\varepsilon),\\
(-1)^n G\sin(n\alpha-\zeta)&=\mp Fe^{bh\cos\alpha}\sin(bh\sin\alpha+\varepsilon),
\end{aligned}$$

et si l'on se rappelle que α désigne l'angle $\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{n}$, on les réduira aisément à ces deux-ci,

$$\zeta=\frac{n\pi}{2}-bh\sin\alpha-\varepsilon,\quad G=\mp(-1)^{n-k}e^{bh\cos\alpha}F.$$

D'après cela, et en ayant égard à la valeur de α, on trouvera pour la partie de $f(u)$ qui répond à une valeur de k différente de 0 et de $\frac{n}{2}$,

1°. Si n est pair,

$$F\left\{\begin{array}{c} e^{bu\sin\frac{k\pi}{n}}\sin\left(bu\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right) \\ \pm(-1)^{\frac{n}{2}-k}\,e^{b(h-u)\sin\frac{k\pi}{n}}\sin\left[b(h-u)\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right] \end{array}\right\};$$

2°. Si n est impair,

$$F\left\{\begin{array}{c} e^{bu\sin\frac{k\pi}{n}}\sin\left(bu\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right) \\ \pm(-1)^{\frac{n-1}{2}-k}\,e^{b(h-u)\sin\frac{k\pi}{n}}\cos\left[b(h-u)\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right] \end{array}\right\}.$$

Nommons, pour abréger, U_k et V_k ces deux expressions, et, en résumant ce qui précède, nous trouverons que les courbes inversement semblables à leurs $n^{ièmes}$ développées ont pour équations, lorsque n est pair,

$$(6)\qquad r = A\left[e^{bu} \pm e^{b(h-u)}\right] + E\sin\left[bu - \frac{bh}{2} - \frac{(n-1\mp 1)\pi}{4}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} U_k,$$

et lorsque n est impair,

$$(7)\qquad r = E\sin\left[bu - \frac{bh}{2} - \frac{(n-1\mp 1)\pi}{4}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} V_k.$$

Relativement aux doubles signes, on doit remarquer que dans une même équation il faut prendre partout le signe supérieur, ou partout le signe inférieur.

Il faut maintenant déterminer la valeur de $f(u)$ qui répond à l'équation (1). Or, si nous supposons cette valeur développée en une série de termes de la forme Ae^{mu}, chacun de ces termes en particulier devra vérifier l'équation, et par conséquent, A restant arbitraire, les valeurs de m devront être telles que l'on ait

$$(8)\qquad m^n = \pm ae^{mh}.$$

La question est donc ramenée à la détermination des racines réelles ou imaginaires de cette dernière équation. Pour trouver les racines réelles, on la mettra sous la forme

$$m^n e^{-mh} = \pm a,$$

et l'on observera que la dérivée du premier membre, savoir,

$$m^{n-1} e^{-mh}(n - mh),$$

ne peut changer de signe que quand m devient égal à $\frac{n}{h}$ ou à o. On saura donc dans quels intervalles la quantité $m^n e^{-mh}$ augmente ou diminue, lorsqu'on fait croître m de $-\infty$ à $+\infty$, et par conséquent on pourra assigner deux limites entre lesquelles tombe chaque valeur de m qui le rend égal à $\pm a$. Cela fait, on pourra calculer chacune de ces racines par les méthodes connues, avec autant d'approximation qu'on voudra.

On trouvera ainsi que, n étant impair, l'équation

$$m^n = ae^{mh}$$

admet une racine positive si h est négatif ou nul, et qu'elle en admet deux si h est positif et moindre que $\frac{n}{be}$: ces deux racines deviennent égales lorsque h est égal à $\frac{n}{be}$, et, lorsque h est plus grand, l'équation n'a plus de racines réelles.

En supposant n pair, on voit que, pour deux valeurs de h égales et de signes contraires, les racines ont les mêmes valeurs en signes contraires. Lorsque h est positif, il y a toujours une racine négative; de plus, si h est moindre que $\frac{n}{be}$, il y a deux racines positives qui deviennent égales pour $h = \frac{n}{be}$.

Quant à l'équation

$$m^n = -ae^{mh},$$

elle n'a pas de racines réelles si n est pair, et, si n est impair, elle a une racine négative quand h est positif, deux racines négatives quand h est

compris entre o et $-\frac{n}{be}$: ces deux racines deviennent égales pour $h = -\frac{n}{be}$, et cessent d'exister lorsque h est moindre que $-\frac{n}{be}$.

Les racines imaginaires de l'équation (8) sont en nombre infini ; mais il sera encore facile de séparer chacune d'elles, et, par suite, de les calculer. Considérons, par exemple, l'équation

$$m^n = ae^{mh},$$

dans laquelle nous supposerons n pair et h positif. Faisons

$$m = z(\cos v \pm \sqrt{-1}\sin v),$$

z étant un nombre positif et v un arc compris entre o et π, il nous viendra

$$z^n(\cos nv \pm \sin nv) = ae^{hz\cos v}\left[\cos(hz\sin v) \pm \sqrt{-1}\sin(hz\sin v)\right],$$

d'où

$$z^n = ae^{hz\cos v}, \quad nv + 2k\pi = hz\sin v,$$

k désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

La dernière équation nous donne

$$z = \frac{nv + 2k\pi}{h\sin v}:$$

substituons dans la précédente cette valeur de z, et nous trouverons

$$\frac{(nv + 2k\pi)^n}{\sin^n v}e^{-\frac{nv + 2k\pi}{\tang v}} = ah^n,$$

équation dont nous représenterons le premier membre par $\varphi(v)$. Nous aurons alors

$$\varphi'(v) = \frac{(nv + 2k\pi)^{n-1}}{\sin^{n+2} v}e^{-\frac{nv + 2k\pi}{\tang v}}\left[n^2\sin^2 v - 2n\sin v.(nv + 2k\pi).\cos v + (nv + 2k\pi)^2\right],$$

expression dont le dernier facteur est essentiellement positif, comme on le voit en le mettant sous les deux formes

$$[n\sin v - (nv + 2k\pi)]^2 + 2n\sin v.(nv + 2k\pi).(1 - \cos v).$$
$$[n\sin v + (nv + 2k\pi)]^2 - 2n\sin v.(nv + 2k\pi).(1 + \cos v).$$

Si l'on attribue au nombre entier k une valeur positive quelconque, ou bien une valeur négative plus grande en valeur absolue que $\frac{n}{2}$, $\varphi'(v)$ ne changera pas de signe de $v = 0$ à $v = \pi$, et comme $\varphi(v)$ est nulle pour une de ces limites et infinie pour l'autre, il existera une valeur de v qui vérifiera l'équation

$$\varphi(v) = ah^n.$$

Lorsque le nombre k est compris entre 0 et $-\frac{n}{2}$, $\varphi'(v)$ change de signe pour $v = -\frac{2k\pi}{n}$; cette valeur de v rend $\varphi(v)$ égale à 0, tandis que cette fonction est infinie pour $v = 0$ et $v = \pi$; l'équation

$$\varphi(v) = ah^n$$

a donc deux racines, l'une entre 0 et $-\frac{2k\pi}{n}$, l'autre entre $-\frac{2k\pi}{n}$ et π.

Si l'on suppose $k = 0$, $\varphi'(v)$ sera toujours positive; mais $\varphi(v)$ se réduisant à $n^n e^{-n}$ pour $v = 0$, et devenant infinie pour $v = \pi$, il existera ou n'existera pas de valeur de v qui rende $\varphi(v)$ égale à ah^n, suivant qu'on aura

$$n^n e^{-n} < \text{ ou } > ah^n, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad h > \text{ ou } < \frac{n}{be};$$

il en sera de même si l'on suppose $k = -\frac{n}{2}$.

La discussion serait toute pareille si n était impair, ou h négatif, ou s'il s'agissait de l'équation

$$m^n = -ae^{mh}.$$

Observons que si h est nul, toutes ces racines imaginaires disparaissent.

Remarquons encore que, pour certaines valeurs de h, il peut y avoir des valeurs imaginaires de m dont la partie réelle soit nulle. En effet, considérons d'abord l'équation

$$m^n = ae^{mh},$$

et faisons

$$m = \pm g\sqrt{-1} = g\left(\cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

g désignant un nombre positif; elle deviendra

$$g^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = a\,(\cos gh \pm \sqrt{-1}\sin gh),$$

ou bien

$$g^n = a, \quad gh = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi.$$

De là

$$g = b, \quad h = \frac{n\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}.$$

Ainsi, lorsqu'on aura

$$h = \frac{n\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b},$$

l'équation

$$m^n = ae^{mh}$$

admettra les deux racines $+b\sqrt{-1}$ et $-b\sqrt{-1}$. On verra pareillement que l'équation

$$m^n = -ae^{mh}$$

admettra les deux mêmes racines, si l'on a

$$h = \frac{(n-2)\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}.$$

Il suit de ce qui précède que la valeur de $f(u)$ ou de r, qui vérifie l'équation (1), renfermera :

1°. Des termes de la forme $Ae^{\alpha u}$ répondant aux racines réelles de l'équation (8) et dont le nombre pourra varier de 0 à 3;

2°. Des termes de la forme $Be^{\beta u}\sin(\gamma u + \delta)$ dont le nombre est infini et dont chacun répond à deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (8).

Dans le cas particulier où cette équation (8) a deux racines égales, deux termes de la forme $Ae^{\alpha u}$ sont remplacés par une expression telle que $e^{\alpha u}(A + Cu)$, et dans un autre cas particulier, où la même équation admet les racines $\pm b\sqrt{-1}$, un des termes de la forme $Be^{\beta u}\sin(\gamma u + \delta)$ se réduit à $B\sin(bu + \delta)$.

Lorsque h est donné, les constantes désignées dans ces formules par A, B, C, δ sont les seules arbitraires.

Ayant obtenu les valeurs de $f(u)$ qui satisfont aux équations (1) et (2), si l'on veut en coordonnées rectangulaires les équations des courbes correspondantes, on remarquera que, s désignant l'arc d'une de ces courbes, r ou $f(u)$ est égal à $\frac{ds}{du}$, et que, pour des axes convenablement choisis, on a

$$dx = ds \cos u, \qquad dy = ds \sin u.$$

Il en résulte

$$dx = f(u) \cos u\, du, \quad dy = f(u) \sin u\, du,$$

et par suite

$$x = \int f(u) \cos u\, du, \quad y = \int f(u) \sin u\, du.$$

Les intégrations indiquées dans les seconds membres pourront s'effectuer; il restera ensuite à éliminer u entre ces deux équations, ce qui ne paraît pas possible en général.

Examinons maintenant quelques-unes des courbes qui répondent au problème proposé. Celle qui est représentée par l'équation

$$r = \mathrm{A} e^{\alpha u}$$

est à la fois égale et directement semblable à toutes ses développées; car quels que soient n et a, on peut toujours disposer de h de manière que la valeur $m = \alpha$ satisfasse à l'une des équations

$$m^n = a e^{mh}, \quad m^n = -a e^{-mh}.$$

En passant aux coordonnées rectangulaires, on trouvera

$$x - p = \frac{\mathrm{A} e^{\alpha u}(\sin u + \alpha \cos u)}{1 + \alpha^2}, \quad y - q = \frac{\mathrm{A} e^{\alpha u}(\alpha \sin u - \cos u)}{1 + \alpha^2},$$

p et q désignant des constantes arbitraires. Faisons

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = \rho, \quad \frac{y-q}{x-p} = \operatorname{tang} \theta, \quad \frac{1}{a} = \operatorname{tang} \omega;$$

il viendra

$$\rho = \frac{A e^{\alpha u}}{1 + \alpha^2} = A \cos \omega . e^{\frac{u}{\operatorname{tang} \omega}},$$

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} \omega}{1 + \operatorname{tang} u \operatorname{tang} \omega} = \operatorname{tang} (u - \omega);$$

et par conséquent

$$\theta = u - \omega, \quad \rho = A \cos \omega . e^{\frac{\theta + \omega}{\operatorname{tang} \omega}},$$

équation d'une spirale logarithmique, dans laquelle le rayon vecteur fait avec la tangente l'angle ω.

L'équation

$$r = B \sin (bu + \delta),$$

que l'on peut toujours ramener à la forme $r = B \sin bu$, represente une courbe semblable directement et inversement à la fois à l'une quelconque de ses développées, et ses dimensions sont à celles de sa $n^{ième}$ développée comme 1 est à b^n.

Si nous prenons d'abord $b = 1$, auquel cas la courbe est égale à ses développées, nous avons

$$dx = B \sin u \cos u \, du, \quad dy = B \sin^2 u \, du,$$

d'où

$$x - p = \frac{B}{4} (1 - \cos 2u), \quad y - q = \frac{B}{2} u - \frac{B}{4} \sin 2u.$$

De là

$$y - q = \frac{B}{4} \operatorname{arc} \cos \left[1 - \frac{4(x-p)}{B} \right] - \sqrt{\frac{B}{2}(x-p) - (x-p)^2}.$$

équation d'une cycloïde engendrée par un cercle dont le diamètre est $\frac{B}{2}$.

Lorsque b est quelconque, l'équation

$$r = B \sin bu$$

représente une épicycloïde; pour le démontrer, nous rapporterons la courbe aux coordonnées polaires ρ et θ employées tout à l'heure. A cet

effet, des équations

$$dx = \mathrm{B}\sin bu\cos u\,du, \quad dy = \mathrm{B}\sin bu\sin u\,du,$$

nous déduirons, en intégrant,

$$x - p = -\frac{\mathrm{B}}{b^2-1}(\sin bu\sin u + b\cos bu\cos u),$$

$$y - q = \frac{\mathrm{B}}{b^2-1}(\sin bu\cos u - b\cos bu\sin u).$$

Il en résulte

$$\rho^2 = \frac{\mathrm{B}^2}{(b^2-1)^2}(\sin^2 bu + b^2\cos^2 bu),$$

$$du = \frac{-(b^2-1)^2\rho\,d\rho}{b\sqrt{[\mathrm{B}^2b^2-(b^2-1)^2\rho^2][(b^2-1)^2\rho^2-\mathrm{B}^2]}}.$$

On a, d'un autre côté,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b\cos bu\sin u - \sin bu\cos u}{\sin bu\sin u + b\cos bu\cos u} = \frac{\operatorname{tang} u - \dfrac{\operatorname{tang} bu}{b}}{1 + \operatorname{tang} u\dfrac{\operatorname{tang} bu}{b}},$$

et si nous faisons

$$\frac{\operatorname{tang} bu}{b} = \operatorname{tang} u',$$

d'où

$$u' = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang} bu}{b}\right), \quad du' = \frac{b^2\,du}{\sin^2 bu + b^2\cos^2 bu} = \frac{\mathrm{B}^2b^2\,du}{(b^2-1)^2\rho^2},$$

nous aurons

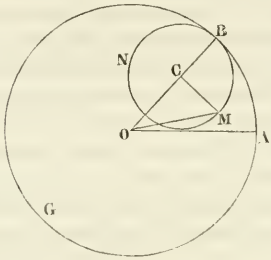
$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u'}{1 + \operatorname{tang} u\operatorname{tang} u'} = \operatorname{tang}(u - u'), \quad \theta = u - u',$$

(9) $$d\theta = du - du' = -\frac{d\rho}{b\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{B}^2b^2-(b^2-1)^2\rho^2}{(b^2-1)^2\rho^2-\mathrm{B}^2}}.$$

Cherchons maintenant l'équation de l'épicycloïde engendrée par le point M de la circonférence BMN pendant qu'elle roule intérieurement sur la circonférence fixe ABG. La droite menée du centre O de celle-ci au centre C de la première passera au point de contact B; la lettre A indique la position du point décrivant, lorsqu'il sert de point de con-

tact aux deux circonférences. Traçons OA, OM, CM, et faisons

$$OA = A, \quad CB = a, \quad OM = \rho, \quad MOA = \theta, \quad BCM = \psi.$$



La figure nous donne

$$\theta = BOA - COM;$$

de plus, l'arc AB est égal à l'arc MB dont la longueur est $a\psi$; par suite,

$$BOA = \frac{a\psi}{A}, \quad \theta = \frac{a\psi}{A} - COM.$$

Mais du triangle COM dans lequel l'angle C est le supplément de ψ, on déduit

$$\cos\psi = \frac{\rho^2 - (A-a)^2 - a^2}{2(A-a)a}, \quad \cos COM = \frac{\rho^2 + (A-a)^2 - a^2}{2(A-a)\rho}:$$

donc

$$\theta = \frac{a}{A}\operatorname{arc\,cos}\frac{\rho^2 - (A-a)^2 - a^2}{2(A-a)a} - \operatorname{arc\,cos}\frac{\rho^2 + (A-a)^2 - a^2}{2(A-a)\rho},$$

et, en différentiant,

$$d\theta = -\frac{(A-2a)\,d\rho}{A\rho}\sqrt{\frac{A^2-\rho^2}{\rho^2-(A-2a)^2}}.$$

Cette équation conviendra également au cas où la circonférence mobile serait extérieure à l'autre, pourvu qu'alors on y regarde a comme négatif. On voit qu'elle devient identique à l'équation (9), lorsqu'on pose

$$A = \frac{Bb}{b^2-1}, \quad A - 2a = \frac{B}{b^2-1}.$$

Ainsi cette équation (9), et par conséquent l'équation $r = \mathrm{B} \sin bu$, représente une épicycloïde qui tourne sa convexité ou sa concavité vers l'origine O selon que le nombre b est supérieur ou inférieur à l'unité, c'est-à-dire selon qu'elle est plus petite ou plus grande que sa développée. Elle nous apprend d'ailleurs que, dans cette courbe, le rayon de courbure est proportionnel au sinus d'un angle qui lui-même est proportionnel à l'angle du rayon de courbure avec une direction fixe. Cette propriété se démontrerait aisément par des considérations géométriques analogues à celles qui servent à établir, dans le livre des *Principes*, la similitude de l'épicycloïde et de sa développée.

Je me borne à mentionner encore deux ou trois courbes assez simples que l'on pourra discuter en formant, comme précédemment, les valeurs de ρ et de tang θ. Par exemple, les courbes représentées par les équations

$$r = \mathrm{A}\left[e^{bu} + e^{b(h-u)}\right], \quad r = \mathrm{A}\left[e^{bu} - e^{b(h-u)}\right],$$

et qui sont semblables à leurs développées d'ordre pair, sont des spirales composées de deux branches symétriques qui s'éloignent à l'infini de part et d'autre d'un rayon vecteur minimum. Dans la premiere courbe, ce rayon vecteur est perpendiculaire à la tangente à son extrémité; dans la seconde, cette extrémité est un point de rebroussement où la tangente se confond avec le rayon vecteur. On peut ajouter que chacune de ces lignes est semblable à la développée de l'autre.

L'équation

$$r = \mathrm{B}e^{\xi u} \sin \gamma u,$$

par laquelle je termine, représente une courbe semblable à sa développée, et dont les dimensions sont aux dimensions homologues de cette développée comme 1 est à $\sqrt{\xi^2 + \gamma^2}$. Elle présente, de même que l'épicycloïde, une suite de points de rebroussement correspondant à des valeurs de θ qui croissent par degrés égaux à $\frac{\pi}{\gamma}$; mais ces points, au lieu d'être situés sur une même circonférence, sont sur une spirale logarithmique, et la tangente en chacun d'eux, au lieu de se confondre avec le rayon vecteur, fait avec lui un angle constant. D'ailleurs le rayon vecteur de chaque point de rebroussement est maximum ou minimum, suivant que $\sqrt{\xi^2 + \gamma^2}$ est plus grand ou plus petit que 1.

DEUXIÈME PARTIE.

Supposons que l'on développe une courbe quelconque AM à partir d'un point A, de façon que sa développante la rencontre en ce point; puis, qu'on développe cette développante à partir du même point A, et ainsi de suite. Proposons-nous de déterminer la limite des courbes ainsi obtenues.

Soit $r = f(u)$ l'équation de la courbe AM; par le point (r, u) menons-lui une tangente qui sera normale à la première développante et la coupera au point (r_1, u_1); par ce dernier point menons à cette première développante une tangente qui coupe la deuxième au point (r_2, u_2), et ainsi de suite. On aura

$$du = du_1 = du_2 = \ldots = du_n,$$

$$\frac{dr_1}{du} = r, \quad \frac{dr_2}{du} = r_1, \quad \frac{dr_n}{du} = r_{n-1},$$

et par conséquent, en supposant $u = 0$ pour le point A,

$$r_n = \int_0^u \int_0^u \ldots \int_0^u f(u)\, du^n,$$

ou bien, en vertu d'une formule connue,

$$r_n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_0^u (u-z)^{n-1} f(z)\, dz.$$

Je supposerai que $f(u)$ ne devienne pas infinie, même lorsque u augmente jusqu'à l'infini; c'est ce qui a lieu, par exemple, dans une courbe fermée et dépourvue de points d'inflexion. J'admettrai aussi que $f(u)$ ne se réduit pas à zéro pour toutes les valeurs finies de u, comme il arriverait si le point A était l'origine d'une spirale logarithmique.

Cela posé, nommons μ une moyenne entre 0 et u; on aura

$$r_n = \frac{f(\mu)}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_0^u (u-z)^{n-1}\, dz = \frac{u^n}{1.2.3\ldots n} f(\mu).$$

Les valeurs de u qui répondent à des points de la $n^{ième}$ développante

doivent donc être telles que $\frac{u^n}{1.2.3\ldots n}$ soit une quantité finie; or, si l'on pose

$$\frac{u^n}{1.2.3\ldots n} = v,$$

et qu'on prenne les logarithmes des deux membres, on trouvera, en appliquant la formule de Stirling,

$$n \log u - n \log n + n - \frac{1}{2} \log(2\pi n) - \frac{1}{12n^2} + \text{etc.} = \log v,$$

d'où

$$\log \frac{u}{n} = -1 + \frac{1}{2n} \log(2\pi n) + \frac{1}{12n^3} - \text{etc.} + \frac{\log v}{n}.$$

Si maintenant on fait n infini, v devant rester fini, on aura

$$\log \frac{u}{n} = -1, \quad u = \frac{n}{e};$$

ainsi, quand n devient infini, u doit le devenir aussi, de manière que le rapport $\frac{u}{n}$ soit égal à $\frac{1}{e}$.

Appelons maintenant ε un nombre très-grand, mais fini, et faisons

$$P = \int_0^\varepsilon (u-z)^{n-1} f(z)\,dz, \quad P' = \int_\varepsilon^u (u-z)^{n-1} f(z)\,dz,$$

de sorte qu'on ait

$$\int_0^u (u-z)^{n-1} f(z)\,dz = P + P'.$$

Soient α une moyenne entre o et ε, α' une moyenne entre ε et u; on aura

$$P = f(\alpha) \int_0^\varepsilon (u-z)^{n-1}\,dz = \frac{u^n f(\alpha)}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)^n\right],$$

$$P' = f(\alpha') \int_\varepsilon^u (u-z)^{n-1}\,dz = \frac{u^n f(\alpha')}{n}\left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)^n.$$

Mais lorsque n devient infini, u devient égal à $\frac{n}{e}$ et $\left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)^n$ à $e^{-e\varepsilon}$;

on a donc

$$P = \frac{u^n f(\alpha)}{n}(1 - e^{-e\varepsilon})(1 + \theta_n), \quad P' = \frac{u^n f(\alpha')}{n} e^{-e\varepsilon}(1 - \theta'_n),$$

θ_n et θ'_n se réduisant à zéro quand n est infini.

On tire de là

$$\frac{P'}{P} = \frac{f(\alpha')}{f(\alpha)} \times \frac{e^{-e\varepsilon}}{1 - e^{-e\varepsilon}} \times \frac{1 + \theta'_n}{1 + \theta_n},$$

et l'on voit que ce rapport est très-petit lorsque n est infini, puisque le nombre ε, quoique fini, est très-grand. En l'appelant β on aura

$$\int_0^u (u - z)^{n-1} f(z)\,dz = P(1 + \beta) = (1 + \beta)\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-1} f(z)\,dz,$$

et par conséquent

$$r_n = \frac{1 + \beta}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

De même, γ étant aussi très-petit quand n est infini, on aura

$$r_{n-1} = \frac{1 + \gamma}{1.2.3\ldots(n-2)}\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-2} f(z)\,dz.$$

Divisons cette équation par la précédente, et nous trouverons

$$\frac{r_{n-1}}{r_n}, \quad \text{ou} \quad \frac{dr_n}{r_n\,du} = (n - 1)\frac{1 + \gamma}{1 + \beta} \times \frac{\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-2} f(z)\,dz}{\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-1} f(z)\,dz}.$$

Le rapport de deux éléments correspondants des intégrales qui sont dans le second membre est $\frac{1}{u - z}$; celui des intégrales entieres est donc compris entre $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{u - \varepsilon}$, ou bien égal à $\frac{1}{u}(1 + \delta)$, δ se réduisant à zéro quand n est infini. On a, par conséquent,

$$\frac{dr_n}{r_n\,du} = \frac{n - 1}{u} \times \frac{(1 + \gamma)(1 + \delta)}{1 + \beta}.$$

Supposons enfin n infini, δ deviendra égal à o, $\frac{n-1}{u}$ prendra la valeur e, et comme on peut supposer δ et γ aussi petits que l'on voudra, il s'ensuit qu'on aura, en remplaçant du par son égal du_n,

$$\frac{dr_n}{r_n\,du_n} = e, \quad \text{d'où} \quad r_n = Ce^{eu_n},$$

équation d'une spirale logarithmique dans laquelle le rayon vecteur fait avec la normale l'angle dont la tangente est e.

Afin de vérifier ce résultat, je vais le retrouver d'une autre manière dans un cas particulier. Je supposerai que, dans la courbe primitive AM, le rayon de courbure soit proportionnel à une puissance moindre que la deuxième de l'arc compté à partir du point A; le cercle répond à la puissance du degré zéro. J'appellerai s, s_1, s_2, etc., les arcs de la courbe AM et de ses développantes compris entre l'origine A et les points qui répondent aux rayons de courbure r, r_1, r_2, etc. : on aura évidemment

$$r_{n+1} = s_n, \quad \frac{ds_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{ds_n}{r_n}.$$

Si donc l'équation de la $n^{ième}$ développante est connue, et que ce soit $r_n = f(s_n)$, on aura pour la suivante

$$ds_{n+1} = \frac{r_n\,dr_{n+1}}{f(r_{n+1})}, \quad s_{n+1} = \int \frac{r_{n+1}\,dr_{n+1}}{f(r_{n+1})}.$$

Cela posé, soit $r = bs^a$ l'équation de la courbe AM; en formant, comme on vient de l'indiquer, les équations des développantes successives, et les résolvant par rapport à r_1, r_2, etc., on trouvera généralement

$$r_n = (2-a)^{\frac{a}{n+1-a}} \times \frac{n+1-a}{[(2-a)(3-a)(4-a)\ldots(n+1-a)]^{\frac{1}{n+1-a}}}\, b^{\frac{1}{n+1-a}}\, s^{\frac{n-a}{n+1-a}}.$$

Si l'on suppose n infini, les quantités

$$(2-a)^{\frac{a}{n+1-a}}, \quad b^{\frac{1}{n+1-a}}, \quad \frac{n-a}{n+1-a},$$

se réduisent à l'unité. Quant au facteur

$$\frac{n+1-a}{[(2-a)(3-a)(4-a)\ldots(n+1-a)]^{\frac{1}{n+1-a}}},$$

si on l'égale à z, on aura

$$\log z = \log(n+1-a)$$
$$-\frac{1}{n+1-a}[\log(2-a)+\log(3-a)+\ldots+\log(n+1-a)],$$

ou, en appliquant une formule connue, et nommant h une constante indépendante de n,

$$\log z = \log(n+1-a)$$
$$-\frac{1}{n+1-a}\left[\begin{array}{l} h+(n+1-a)\log(n+1-a)-(n+1-a) \\ +\frac{1}{2}\log(n+1-a)+\frac{1}{12(n+1-a)}-\text{etc.}\end{array}\right]$$
$$=1-\frac{\log(n+1-a)+h}{2(n+1-a)}-\frac{1}{12(n+1-a)^2}+\text{etc.}$$

Si maintenant on fait $n=\infty$, il viendra

$$\log z = 1, \quad z = e,$$

et par conséquent

$$r_n = es_n.$$

Telle est l'équation de la limite des développantes; en la différentiant, on trouve

$$dr_n = e\,ds_n = er_n\,du_n, \quad \frac{dr_n}{r_n} = e\,du_n,$$

et par conséquent

$$r_n = \mathrm{C}e^{eu_n},$$

comme plus haut.

Il existe sur les développantes successives un autre théorème énoncé par Jean Bernoulli. Concevons un arc de courbe AB, tel que les tangentes à ses deux extrémités soient perpendiculaires entre elles; développons-le à partir du point B, ce qui nous donnera l'arc BC; développons celui-ci à partir du point C, ce qui nous donnera l'arc CD, et

ainsi de suite ; les extrémités de ces arcs seront toutes situées sur deux parallèles, savoir, la tangente à l'arc primitif AB au point A, et sa normale au point B. Le théorème dont je parle consiste en ce que la limite des arcs ainsi construits est une demi-cycloïde.

Poisson en a donné une démonstration dans le XVIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*; il m'a semblé qu'on la simplifiait beaucoup en la présentant de la manière suivante :

Par un point M de l'arc AB traçons-lui une tangente qui coupe l'arc BC en N; par le point N, menons à ce dernier une tangente qui coupe l'arc CD en P, et ainsi de suite. Soient r, r_1, r_2, etc., les rayons de courbure de ces arcs aux points M, N, P, etc. Soit u l'angle que les rayons de courbure de rang pair font avec la tangente à l'arc AB au point B, et que ceux de rang impair font avec la tangente au même arc au point A. On aura

$$dr_2 = r_1\,du, \quad dr_3 = -\,r_2\,du, \quad dr_4 = r_3\,du, \quad \text{etc.},$$

les signes des seconds membres étant alternativement + et —; il en résulte

$$r_2 = \int_0^u r_1\,du, \quad r_3 = \int_u^{\frac{\pi}{2}} r_2\,du, \quad r_4 = \int_0^u r_3\,du, \quad \text{etc.},$$

les limites des intégrations étant alternativement o et u, u et $\frac{\pi}{2}$. Mais r_1 est une fonction de u qui s'annule pour $u = \frac{\pi}{2}$; elle peut donc, de o à u, être exprimée par la formule

$$r_1 = A_1 \cos u + A_3 \cos 3u + A_5 \cos 5u + \text{etc.},$$

en faisant

$$A_i = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha)\cos i\alpha.d\alpha$$

On en conclut

$$r_2 = A_1 \sin u + \frac{A_3}{3}\sin 3u + \frac{A_5}{5}\sin 5u + \text{etc.},$$

$$r_3 = A_1 \cos u + \frac{A_3}{3^2}\cos 3u + \frac{A_5}{5^2}\cos 5u + \text{etc.},$$

et généralement

$$r_n = A_1 \sin u + \frac{A_3}{3^{n-1}} \sin 3u + \frac{A_5}{5^{n-1}} \sin 5u + \text{etc.},$$

si n est un nombre pair, ou bien, si n est impair,

$$r_n = A_1 \cos u + \frac{A_3}{3^{n-1}} \cos 3u + \frac{A_5}{5^{n-1}} \cos 5u + \text{etc.}$$

Supposons maintenant n infini, tous les termes disparaîtront, à l'exception du premier, et nous aurons

$$r_n = A_1 \sin u,$$

ou

$$r_n = A_1 \cos u.$$

La première de ces équations représente, comme on l'a vu plus haut, une cycloïde, et il en est de même de la seconde qui s'en déduit en changeant u en $\frac{\pi}{2} - u$.

NOTE SUR LA COURBURE DES SURFACES;

PAR M. FINCK,

Professeur de Mathématiques à Strasbourg.

Dans le cahier d'avril de ce Journal, t. IX, p. 135, il a été question du beau théorème de M. Ch. Dupin, sur les surfaces trajectoires orthogonales. Dans mon cours d'analyse à la Faculté des Sciences, je démontre ce théorème de la manière suivante. On sait qu'il consiste en ce que, si deux surfaces se coupent partout orthogonalement, l'intersection est une ligne de courbure des deux surfaces. Ce théorème est évident si l'une des deux surfaces est développable, vu que l'intersection coupe, dans ce cas, à angles droits toutes les arêtes de celle-ci, etc. Or, soient S, S′ deux surfaces trajectoires orthogonales quelconques, C leur intersection. Si par un point de C on imagine un plan P, tangent à S′, il sera normal à S. Faisons mouvoir ce plan de façon qu'il reste tangent à S′ sur C; son enveloppe sera une surface développable trajectoire orthogonale de S, et passant par C, et c'est par cette intersection C qu'elle est orthogonale à S. Donc C est une ligne de courbure de S. De même pour S′.

DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE SUR UN ELLIPSOÏDE QUELCONQUE;

PAR J. LIOUVILLE.

L'équation différentielle de la ligne géodésique (la ligne la plus courte) sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, se présente sous une forme extrêmement compliquée lorsqu'on fait usage des coordonnées ordinaires. Aussi les géomètres avaient-ils été rebutés de la traiter. Mais M. Jacobi a observé qu'elle devient beaucoup plus maniable quand on se sert, pour déterminer la position d'un point sur l'ellipsoïde, des deux lignes de courbure passant par ce point, genre tout particulier de coordonnées dont Legendre s'est autrefois servi avec succès. L'illustre géomètre de Kœnigsberg est parvenu, de cette manière, à ramener la détermination de la ligne géodésique demandée aux simples quadratures. On peut voir, dans le tome VI de ce Journal (page 267) la formule élégante qu'il a obtenue et dans laquelle figurent des transcendantes abéliennes. M. Jacobi s'est contenté de poser cette formule sans ajouter la démonstration; mais en indiquant le système de coordonnées qu'il a employé, il a, par cela même, rendu cette démonstration très-facile à trouver. Je viens après d'autres géomètres en présenter une à mon tour, en y joignant quelques remarques qui me semblent utiles.

Je prends pour point de départ ce théorème connu (ou, si l'on veut, cette définition), que la ligne géodésique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d'une impulsion quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont le mouvement ne serait altéré par aucune force accélératrice.

Soient

$$\frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

les équations de trois surfaces du second degré, l'une ellipsoïdale, les deux autres hyperboliques à une nappe et à deux nappes. En regardant ρ, μ, ν comme trois variables, on pourra faire passer ces surfaces par tout point (x, y, z) de l'espace; leur intersection déterminera ainsi ce point dont ρ, μ, ν seront les coordonnées. Mais ces coordonnées se réduiront à deux (μ, ν) lorsqu'on se borne à considérer les points situés sur l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

ce qui aura lieu dans la question qui nous occupe, pourvu qu'on représente par

$$2\rho, \quad 2\sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad 2\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

les axes principaux de l'ellipsoïde dont on veut déterminer la ligne géodésique; les deux variables ou coordonnées μ, ν se rapportent respectivement aux deux genres de lignes de courbure de la surface dont

$$\nu = constante, \quad \text{et} \quad \mu = constante,$$

sont les équations respectives.

On sait, et il est facile de vérifier [*] que les éléments de ces lignes de courbure à partir d'un point donné (ρ, μ, ν) sont

$$ds' = \sqrt{p}.d\mu, \quad ds'' = \sqrt{q}.d\nu,$$

en faisant

$$p = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad q = \frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}.$$

Le carré de la vitesse d'un mobile sur l'ellipsoïde (ds désignant l'élément décrit pendant le temps dt) est, par suite,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 = p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2:$$

---

[*] *Voyez* dans le tome II de ce Journal (page 147) un Mémoire de M. Lamé, mais en ayant soin d'observer que l'auteur désigne par les lettres α, ν, ρ ce que nous désignons ici respectivement par ν, μ, ν.

et si ce mobile n'est sollicité par aucune force accélératrice (auquel cas la ligne décrite sera précisément la ligne géodésique), on aura, d'après les formules de la *Mécanique analytique*, les deux équations suivantes du mouvement,

$$\frac{d.p\frac{d\mu}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\mu}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d.q\frac{d\nu}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\nu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\nu}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2;$$

écrivons aussi l'équation des *forces vives* qui s'en déduit,

$$p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \textit{une constante}\ \mathrm{C}.$$

Maintenant, soit

$$\frac{\rho^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} = m, \qquad \frac{\rho^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} = n;$$

d'où

$$p = m(\mu^2 - \nu^2), \quad q = n(\mu^2 - \nu^2).$$

En substituant ces valeurs dans la première des équations du mouvement et développant les calculs, on aura

$$m(\mu^2 - \nu^2)\frac{d^2\mu}{dt^2} + (\mu^2 - \nu^2)\frac{dm}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + 2m\mu\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - 2m\nu\frac{d\nu}{dt}\frac{d\mu}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)\frac{dm}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + m\mu\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + n\mu\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2.$$

d'où

$$m(\mu^2 - \nu^2)\frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)\frac{dm}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + 2m\mu\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - 2m\nu\frac{d\nu}{dt}\frac{d\mu}{dt}$$
$$= \mu\left[m\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + n\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right] = \frac{\mathrm{C}\mu}{\mu^2 - \nu},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{m}\,.\frac{d.(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{m}\frac{d\mu}{dt}}{dt} = \frac{\mathrm{C}\mu}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Multipliant par $2(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu$, et intégrant, on aura donc

$$m(\mu^2 - \nu^2)^2 \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \mathrm{A} + \mathrm{C}\mu^2,$$

A étant une constante. La seconde équation du mouvement, traitée d'une manière semblable, fournira

$$n(\mu^2 - \nu^2)^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \mathrm{B} - \mathrm{C}\nu^2.$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que les constantes A et B sont égales au signe près, car en ajoutant membre à membre les équations que nous venons d'obtenir, on a

$$(\mu^2 - \nu^2)\left[p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}(\mu^2 - \nu^2),$$

d'où

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A},$$

puisque le premier membre est égal à $\mathrm{C}(\mu^2 - \nu^2)$ en vertu de l'équation des forces vives.

En divisant ces mêmes équations membre à membre, nous aurons dès lors

$$\frac{m\,d\mu^2}{n\,d\nu^2} = \frac{\mathrm{C}\mu^2 - \mathrm{B}}{\mathrm{B} - \mathrm{C}\nu^2} = \frac{\mu^2 - \beta}{\beta - \nu^2},$$

β étant, comme B et C, une constante arbitraire.

Cette équation peut être mise sous une forme assez élégante; elle donne en effet

$$\beta = \frac{n\nu^2\,d\nu^2 + m\nu\,d\mu^2}{n\,d\nu^2 + m\,d\mu^2} = \frac{\mu^2\,ds''^2 + \nu^2\,ds'^2}{ds^2},$$

d'où

$$\beta = \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i,$$

i étant l'angle compris entre ds et ds'' [*]. Mais la formule que nous avons trouvée d'abord est plus commode pour achever le calcul.

---

[*] Sur une surface quelconque la ligne géodésique jouit de cette propriété, que le plan osculateur est en chaque point normal à la surface. C'est ce qu'on prouve aisément

Extrayant la racine carrée des deux membres, et prenant, pour fixer les idées, le signe — dans le second, on en conclut de suite

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \beta}} = \alpha - \int \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\,.\,d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{\beta - \nu^2}}.$$

Telle est l'équation demandée de la ligne géodésique sur un ellipsoïde à trois axes. C'est, aux notations près, celle de M. Jacobi, qui, du reste, au lieu des variables μ et ν, emploie deux variables φ et ψ liées à celles-là par les relations

$$\nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

L'élément ds de la ligne géodésique est exprimé par

$$ds = \sqrt{p d\mu^2 + q d\nu^2}.$$

D'ailleurs, en multipliant ses deux membres par $\sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, l'équation

$$\frac{\sqrt{m}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} = -\frac{\sqrt{n}\,.\,d\nu}{\sqrt{\beta - \nu^2}}$$

nous donne

$$\frac{\sqrt{p}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} = -\frac{\sqrt{q}\,.\,d\nu}{\sqrt{\beta - \nu^2}}.$$

On en conclut

$$ds = \sqrt{p d\mu^2 + \frac{p(\beta - \nu^2)d\mu^2}{\mu^2 - \beta}} = \frac{d\mu\sqrt{p(\mu^2 - \nu^2)}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}.$$

---

par la géométrie. De là une équation différentielle du second ordre dont

$$\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = \beta$$

est une intégrale première pour le cas particulier de l'ellipsoïde. Ne pourrait-on pas arriver aussi par des considérations purement géométriques à cette intégrale première dont la forme est si simple, ou (ce qui est au fond la même chose) au théorème curieux démontré par M. Joachimsthal dans le Journal de M. Crelle, savoir, que PD = *constante*, le long de la ligne géodésique, D étant le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à l'élément ds, et P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface en un point de cet élément?

ou bien

$$ds = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{m}\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} = \frac{\mu^2\sqrt{m}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} - \frac{\nu^2\sqrt{m}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}.$$

et enfin

$$ds = \frac{\mu^2\sqrt{m}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}\,d\mu + \frac{\nu^2\sqrt{n}}{\sqrt{\beta - \nu^2}}\,d\nu.$$

Ici les variables sont séparées comme dans l'équation même de la courbe; on a donc cette formule très-remarquable

$$s = \int \frac{\mu^2\sqrt{m}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}\,d\mu + \int \frac{\nu^2\sqrt{n}}{\sqrt{\beta - \nu^2}}\,d\nu + \textit{constante}.$$

Les limites supérieures de nos intégrales sont, bien entendu, les variables mêmes μ, ν; quant aux limites inférieures, ce sont des quantités choisies arbitrairement une fois pour toutes.

Soit, pour abréger,

$$\Delta(\mu^2) = \pm\sqrt{\mu^2(\rho^2 - \mu^2)(h^2 - \mu^2)(c^2 - \mu^2)(\beta - \mu^2)}.$$

L'équation que nous avons trouvée pour la ligne géodésique peut s'écrire

$$\int \frac{(\rho^2 - \mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{(\rho^2 - \nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} = 2\alpha.$$

$\Delta^2(\mu^2)$ étant par rapport à μ^2 un polynôme du cinquième degré, les intégrales qui entrent dans le premier membre sont des intégrales abéliennes de première classe et de première espèce; en désignant donc par h une constante quelconque différente de ρ, et faisant

$$\int \frac{(h^2 - \mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{(h^2 - \nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} = u,$$

on aura

$$\mu^2 = \lambda(2\alpha\,.\,u), \quad \nu^2 = \lambda_1(2\alpha, u),$$

λ et λ_1 indiquant les fonctions inverses que M. Jacobi a introduites en analyse. Ces fonctions à deux variables, que l'emploi de l'auxiliaire u nous a permis de mettre en évidence, jouissent de nombreuses propriétés. On sait, par exemple, qu'elles ont quatre périodes distinctes. On sait aussi que

$$\lambda(2\alpha + 2\alpha', u + u'), \quad \lambda_1(2\alpha + 2\alpha', u + u')$$

s'expriment algébriquement et même à l'aide de radicaux carrés seulement) par $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$, $\lambda(2\alpha', u')$, $\lambda_1(2\alpha', u')$. Enfin $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$, où les arguments α et u sont quelconques, s'expriment de la même manière à l'aide des fonctions où un seul argument reste variable, l'autre étant égal à une constante quelconque, à zéro si l'on veut.

Quant à la formule pour l'arc s, elle se compose d'intégrales abéliennes du même genre que les précédentes, mais de seconde espèce, car

$$s = \int \frac{\mu^2(\rho^2-\mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{\nu^2(\rho^2-\nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} + \textit{constante}.$$

Introduisons avec M. Hermite les quantités α et u, au lieu de μ et ν qui en dépendent, puis posons

$$\int \frac{\mu^2(\rho^2-\mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{\nu^2(\rho^2-\nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} = \mathrm{E}(2\alpha, u);$$

nous aurons

$$s = \mathrm{E}(2\alpha, u) - \mathrm{E}(2\alpha, u_0),$$

u_0 désignant la valeur de u pour laquelle on prend $s = 0$.

Or, il suit du célèbre théorème d'Abel sur les sommes d'intégrales, que

$$\mathrm{E}(2\alpha + 2\alpha', u + u') = \mathrm{E}(2\alpha, u) + \mathrm{E}(2\alpha', u') + \mathrm{R},$$

R désignant une fonction de $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$, $\lambda(2\alpha', u')$, $\lambda_1(2\alpha', u')$, algébrique et même dépendante de simples radicaux carrés. On sait aussi que $\mathrm{E}(2\alpha, u)$ s'exprime dans toute sa généralité par des fonctions à un seul argument, telles que $\mathrm{E}(2\alpha, 0)$, $\mathrm{E}(0, u)$, etc.

Tous ces théorèmes d'analyse qui établissent entre les coordonnées de certains points et les longueurs de certains arcs une relation dépendante uniquement de la règle et du compas, répondent à des théorèmes de géométrie analogues à ceux qu'on a autrefois obtenus pour les arcs d'ellipse[*]. Ils dérivent de la considération des amplitudes des

---

[*] Énonçons ici d'une manière plus précise un de ces théorèmes.

Donnons à α une valeur déterminée et à u deux valeurs particulières u_0, u; de là

fonctions abéliennes. D'autres seront relatifs à leurs modules. Afin de bien fixer les idées, prenons pour la limite inférieure des intégrales relatives à ν^2 une constante absolue, zéro par exemple; prenons de même une constante absolue pour la limite inférieure des intégrales relatives à μ^2; soit enfin, si l'on veut, $h = 0$. Nos fonctions $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$ seront ainsi définies avec précision. Mais outre 2α et u, elles contiennent implicitement ρ, b, c, β. Pour un ellipsoïde donné, ρ, b, c sont donnés. Les lignes géodésiques en nombre infini que l'on peut concevoir sur cet ellipsoïde répondront aux diverses valeurs des constantes α, β; et c'est en faisant varier u seulement que l'on parcourra chacune d'elles. Considérons en particulier les lignes géodésiques qui répondent aux diverses valeurs de α et à une valeur fixe de β. Les coordonnées de chaque point de chacune d'entre elles étant fournies par

$$\mu^2 = \lambda(2\alpha, u), \quad \nu^2 = \lambda_1(2\alpha, u),$$

ou λ et λ_1 sont des fonctions bien déterminées, les propriétés qu'on aura alors à rechercher dépendront des amplitudes 2α et u seulement. Mais si l'on fait varier β, les fonctions λ, λ_1 varieront aussi, et la considération des propriétés de leurs modules deviendra nécessaire. Il en sera de même si l'on veut comparer entre elles des lignes géodésiques relatives à divers ellipsoïdes, c'est-à-dire faire varier b, c ou ρ.

---

un arc s de ligne géodésique terminé aux deux points (μ_0, ν_0), (μ, ν) pour lesquels on a

$$\mu^2 = \lambda(2\alpha, u), \quad \nu^2 = \lambda_1(2\alpha, u), \quad \mu_0^2 = \lambda(2\alpha, u_0), \quad \nu_0^2 = \lambda_1(2\alpha, u_0).$$

Pour d'autres valeurs α', u'_0, u', on aura un autre arc s' terminé aux points (μ'_0, ν'_0), (μ', ν') pour lesquels

$$\mu'^2 = \lambda(2\alpha', u'), \quad \text{etc.}$$

Enfin le système des valeurs $\alpha + \alpha'$, $u_0 + u'_0$, $u + u'$ fournira un troisième arc s'' terminé aux points (μ''_0, ν''_0), (μ'', ν'') pour lesquels

$$\mu''^2 = \lambda(2\alpha + 2\alpha', u + u'), \quad \text{etc.}$$

Or, des propriétés des fonctions abéliennes qu'on vient de rappeler, il suit immédiatement : 1° Que μ'', ν'' dépendront géométriquement de μ, ν, μ', ν', et μ''_0, ν''_0 de $\mu_0, \nu_0, \mu'_0, \nu'_0$; ainsi, les coordonnées des extrémités de s et s' étant données, on pourra trouver celles des points extrêmes de s''; 2° que l'arc s'' s'exprimera par la somme $s + s'$ des deux autres, à une quantité algébrique près dont la valeur pourra être construite au moyen de la règle et du compas.

SUR LES COURBES TAUTOCHRONES;

PAR M. PUISEUX.

1. La méthode que je vais suivre pour traiter le problème des tautochrones est uniquement fondée sur la différentiation sous le signe $\int$. Elle me semble préférable au développement en série qu'on trouve dans la *Mécanique* de Poisson. Je détermine l'équation de la tautochrone soit dans le vide, soit dans un milieu dont la résistance est comme le carré de la vitesse, et en supposant le mobile pesant ou sollicité par une force dirigée vers un centre fixe. En particulier, lorsque le mobile est attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance, et que la résistance est nulle, j'obtiens pour solutions la ligne droite, la spirale logarithmique, l'épicycloïde, et une spirale que j'ai considérée ailleurs, et qui jouit de la propriété remarquable d'être semblable à la développée de sa développée.

2. Je supposerai d'abord le mobile pesant et dans le vide; je dirigerai l'axe des x en sens contraire de la pesanteur, et il s'agira de trouver la courbe que doit suivre un point matériel pour arriver toujours dans le même temps à l'origine des coordonnées, quel que soit le point d'où il est parti sans vitesse initiale. Nommons t le temps, s l'arc de la tautochrone à partir de l'origine, h la valeur de x pour le point de départ du mobile, g la pesanteur. Nous aurons, par le principe des forces vives,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h-x), \quad dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Si donc nous appelons T le temps employé par le mobile pour arriver

à l'origine, et si nous faisons $s = \varphi(x)$, il nous viendra

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}},$$

ou bien, en posant $x = hz$,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\varphi'(hz)\,dz\sqrt{h}}{\sqrt{1-z}}.$$

Par la nature du problème, cette valeur de T doit être indépendante de h; il faut donc que sa dérivée relative à h soit nulle. Mais on a

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}} \int_0^1 \frac{[2hz\varphi''(hz) + \varphi'(hz)]\,dz}{\sqrt{1-z}};$$

la quantité entre crochets est une fonction de hz, et si nous faisons

$$2x\varphi''(x) + \varphi'(x) = \varphi_1(x),$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}} \int_0^1 \frac{\varphi_1(hz)\,dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{2h\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}.$$

Mais l'intégrale définie $\int_0^h \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}$ ne peut pas être nulle, quel que soit h, à moins que la fonction $\varphi_1(x)$ ne soit elle-même identiquement nulle; car autrement on pourrait prendre h assez petit pour que de $x = 0$ à $x = h$, $\varphi_1(x)$ fût toujours de même signe, et alors l'intégrale, ayant tous ses éléments de même signe, ne serait pas nulle. On a donc l'équation

$$2x\varphi''(x) + \varphi'(x) = 0,$$

d'où

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{c}{x}},$$

c étant une constante arbitraire. On a donc, pour la courbe cherchée,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{c}{x}},$$

et, en intégrant une seconde fois,

$$s = 2\sqrt{cx};$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que s et x doivent être nuls en même temps. Si dans la valeur de T on remplace $\varphi'(x)$ par sa valeur, on trouve

$$T = \pi\sqrt{\frac{c}{2g}},$$

valeur indépendante de h, comme cela devait avoir lieu. On tire de là

$$\sqrt{c} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi},$$

et par conséquent

$$s = \frac{2T}{\pi}\sqrt{2gx}, \quad x = \frac{\pi}{8gT^2}s^2.$$

Cette équation représente une cycloïde qui a son sommet à l'origine et dont l'axe, dirigé en sens contraire de la pesanteur, a pour longueur $\frac{2gT^2}{\pi^2}$.

5. Supposons maintenant le mobile attiré ou repoussé par un centre fixe : soient r sa distance à ce centre, $f(r)$ la force qui le sollicite, et qu'on regarde comme positive ou négative, selon qu'elle est attractive ou répulsive. Appelons a la valeur de r qui répond au point de départ du mobile, α celle qui répond à l'origine des arcs parcourus dans le même temps, θ l'angle compris entre les rayons vecteurs r et α. Le principe des forces vives nous donnera

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -2\int_a^r f(r)\,dr;$$

faisons

$$2\int_\alpha^r f(r)\,dr = x, \quad 2\int_\alpha^a f(r)\,dr = h;$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{ds^2}{dt^2} = h - x, \quad \text{d'où} \quad dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Si donc nous désignons par T le temps employé à parcourir l'arc dont les extrémités répondent à $r = a$, $r = \alpha$. ou bien à $x = h$, $x = 0$, et si nous posons de plus $s = \varphi(x)$, nous aurons

$$T = \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}.$$

Cette valeur de T ne diffère que par le facteur constant $\sqrt{2g}$ de celle qu'on a trouvée plus haut; elle doit être indépendante de a et par conséquent de h; on aura donc encore

$$\varphi'(x), \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{c}{x}}, \quad s = 2\sqrt{cx},$$

d'où résulte

$$T = \pi\sqrt{c},$$

et, par suite,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{T}{\pi\sqrt{x}}, \qquad s = \frac{2T}{\pi}\sqrt{x},$$

ou enfin, en remplaçant x par sa valeur,

$$ds = \frac{2Tf(r)\,dr}{\pi\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)\,dr}}, \quad s = \frac{2T}{\pi}\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)\,dr}.$$

Ces deux équations multipliées ensemble nous donnent

$$f(r)\frac{dr}{ds} = \frac{\pi^2 s}{4T^2};$$

on voit par là que la composante suivant le rayon vecteur de la force qui sollicite le mobile doit être à chaque instant proportionnelle à l'arc qui lui reste à parcourir. Cette propriété de la tautochrone était connue de Newton (*Principes*, liv. Ier, section 10) [*].

---

[*] On en déduit immédiatement la solution de cette question : Quelle doit être la loi de l'attraction, pour qu'une courbe donnée soit tautochrone?

4. De l'équation qui donne la valeur de ds, on tire

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\pi}{T\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\int_\alpha^r f(r)\,dr}}{f(r)};$$

on voit par là que $\frac{dr}{ds}$ se réduit à zéro, quand on fait $r = \alpha$, en exceptant le cas particulier où l'on aurait

$$f(\alpha) = 0.$$

On en conclut que généralement la tautochrone est normale au rayon vecteur mené du centre fixe à l'origine des arcs parcourus en temps égaux; cette origine est alors un sommet de la courbe.

Mais il peut en être autrement si l'on a

$$f(\alpha) = 0.$$

Alors l'expression de $\frac{dr}{ds}$ prend, pour $r = \alpha$, la forme $\frac{0}{0}$, et par la méthode ordinaire on trouve que sa vraie valeur est $\frac{\pi}{2T\sqrt{f'(\alpha)}}$: tel est le cosinus de l'angle sous lequel le rayon vecteur mené à l'origine des arcs coupe la tautochrone. Si toutefois ce cosinus était plus grand que 1 ou imaginaire, la courbe serait elle-même imaginaire, au moins pour les valeurs de r voisines de α, et par conséquent ne répondrait pas à la question.

5. Si dans l'équation précédente on remplace ds par $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, on aura l'équation de la tautochrone en coordonnées polaires : elle peut s'écrire

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{\frac{2T^2}{\pi^2} f^2(r) - \int_\alpha^r f(r)\,dr}{\int_\alpha^r f(r)\,dr}}.$$

Supposons en particulier la force proportionnelle à une puissance de la distance, de sorte qu'on ait

$$f(r) = mr^p;$$

il viendra

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{R}{r^{p+1} - \alpha^{p+1}}}.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$R = \frac{2(p+1)Tm}{\pi^2} \cdot r^{2p} - r^{p+1} + \alpha^{p+1}.$$

La forme de la courbe dépend principalement du nombre et de la grandeur des valeurs positives de r qui annullent R. Or, la dérivée de R étant un binôme, on pourra toujours savoir pour quelles valeurs de r ce trinôme augmente ou diminue, et on connaîtra par conséquent dans quels intervalles se trouvent les racines positives de l'équation

$$R = 0,$$

s'il en existe. Sans entrer dans le détail de cette discussion, qui exige la distinction d'un assez grand nombre de cas, j'en indique seulement les résultats principaux.

En supposant que α ne soit pas nul, le rayon vecteur mené à l'origine des arcs est normal à la courbe et la partage en deux parties symétriques : la longueur α de ce rayon est un maximum par rapport aux rayons voisins, si la force est répulsive; un minimum, si elle est attractive. Dans ce dernier cas, la courbe à son sommet peut tourner vers le centre fixe sa concavité ou sa convexité ; le rayon vecteur peut croître jusqu'à l'infini, et alors la courbe est une spirale composée de deux branches infinies symétriques, ou bien le rayon vecteur a un maximum fini; alors le rayon maximum est tangent à la courbe, et celle-ci est analogue pour la forme à une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile roulant intérieurement sur un autre cercle décrit du centre fixe.

La force étant toujours attractive, si l'on suppose $\alpha = 0$ et p compris entre $+1$ et -1, l'origine des arcs se confond avec le centre fixe, et la courbe se compose de deux branches symétriques qui, partant d'un même point où elles sont tangentes au rayon vecteur maximum, s'enroulent autour du centre fixe et ne l'atteignent qu'après un nombre infini de révolutions.

Lorsque la force est répulsive, le rayon vecteur peut décroître jusqu'à zéro ou avoir un minimum : s'il y a un minimum, la forme de la

courbe est analogue à celle d'une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un autre cercle décrit du centre fixe : si le rayon n'a pas de minimum, la courbe est une spirale à deux branches symétriques qui s'approchent indéfiniment du centre sans l'atteindre : leur longueur peut être finie ou infinie

6. Considérons plus particulièrement le cas où la force est proportionnelle à la première puissance de la distance; l'équation de la tautochrone devient, en faisant $p = 1$,

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{\left(\frac{4T^2 m}{\pi^2} - 1\right) r^2 + \alpha^2}{r^2 - \alpha^2}} \text{ [*]}.$$

Si l'on suppose d'abord $m < 0$, ou la force répulsive, et qu'on fasse $-\frac{4T^2 m}{\pi^2} + 1 = \frac{1}{\mu^2}$, on voit que cette équation appartient à une épicycloïde qu'on peut décrire en faisant rouler extérieurement un cercle de rayon $\frac{(1-\mu)\alpha}{2}$ sur un autre cercle décrit du centre fixe avec le rayon $\mu\alpha$. Cette propriété de l'épicycloïde, d'être tautochrone lorsque la force est proportionnelle à la première puissance de la distance, se trouve démontrée dans le livre des *Principes* (loc. cit.).

Lorsque la force est attractive, il faut distinguer plusieurs cas :

Soit $\frac{4T^2 m}{\pi^2} < 1$, et faisons $1 - \frac{4T^2 m}{\pi^2} = \frac{1}{\lambda^2}$: la courbe sera encore une épicycloïde, et $\frac{(\lambda - 1)\alpha}{2}$ sera le rayon du cercle qui l'engendrera en roulant intérieurement sur un autre cercle décrit du centre fixe avec le rayon $\lambda\alpha$.

Soit maintenant $\frac{4T^2 m}{\pi^2} = 1$: l'équation représente une droite située à la distance α du centre fixe; on retrouve ainsi une propriété bien connue de cette ligne.

Soit enfin $\frac{4T^2 m}{\pi^2} > 1$, et faisons $\frac{4T^2 m}{\pi^2} - 1 = \frac{1}{\lambda^2}$; l'équation de la tau-

[*] Elle est alors intégrable.

tochrone devient

$$d\theta = \pm \frac{dr}{\lambda r}\sqrt{\frac{r^2 + \lambda^2 \alpha^2}{r^2 - \alpha^2}}.$$

On voit que r peut croître depuis α jusqu'à l'infini; θ devient d'ailleurs infini en même temps que r: la courbe est donc une spirale à deux branches symétriques s'éloignant indéfiniment du centre fixe. Mais elle jouit, en outre, d'une propriété remarquable; c'est qu'elle est semblable, non pas comme l'épicycloïde à sa développée, mais à la développée de sa développée, de sorte qu'en formant ses développées successives, on obtient une série de courbes semblables de deux en deux

Cette proposition se déduit immédiatement, comme je l'ai fait voir dans un précédent article, de la relation

$$\rho = \frac{\alpha(1+\lambda^2)}{2}(e^{\lambda u} + e^{-\lambda u}),$$

qui existe entre le rayon de courbure ρ d'un point quelconque de la courbe, et l'angle u qu'il fait avec le rayon vecteur mené du centre fixe au sommet. Pour démontrer que cette relation convient à la ligne dont nous nous occupons, il suffit de faire voir qu'on en peut tirer son équation entre r et θ.

Prenons pour axe des y une parallèle à la droite avec laquelle le rayon de courbure fait l'angle u, pour axe des x une perpendiculaire; nous aurons

$$dx = \rho \cos u\, du, \quad dy = -\rho \sin u\, du$$

Remplaçons ρ par sa valeur écrite plus haut, intégrons, et disposons des constantes arbitraires de façon que l'on ait $x = 0$ et $y = \alpha$ pour $u = 0$; il viendra

$$x = \frac{\alpha}{2}[e^{\lambda u}(\sin u + \lambda \cos u) + e^{-\lambda u}(\sin u - \lambda \cos u)],$$

$$y = \frac{\alpha}{2}[e^{\lambda u}(\cos u - \lambda \sin u) + e^{-\lambda u}(\cos u + \lambda \sin u)],$$

et par conséquent

$$x^2 + y^2, \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{\alpha^2}{4}[(1+\lambda^2)(e^{2\lambda u} + e^{-2\lambda u}) + 2(1-\lambda^2)].$$

Tirons de cette équation $e^{2\lambda u} + e^{-2\lambda u}$; ajoutons-y ± 2, et extrayons la racine carrée; nous trouverons

$$e^{\lambda u} + e^{-\lambda u} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{r^2+\lambda^2\alpha^2}{1+\lambda^2}}, \quad e^{\lambda u} - e^{-\lambda u} = \pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{r^2-\alpha^2}{1+\lambda^2}}.$$

et en différentiant l'une de ces équations, puis la divisant par l'autre, nous aurons

$$du = \pm\frac{r\,dr}{\lambda\sqrt{(r^2-\alpha^2)(r^2+\lambda^2\alpha^2)}}.$$

D'un autre côté, si dans la relation

$$r^2\,d\theta = y\,dx - x\,dy = \rho\,du\,(x\sin u + y\cos u),$$

nous remplaçons ρ, x, y par leurs valeurs en fonction de u, il nous viendra

$$r^2\,d\theta = \frac{\alpha^2(1+\lambda^2)}{4}(e^{\lambda u} + e^{-\lambda u})^2\,du = \pm\,r\,dr\sqrt{\frac{r^2+\lambda^2\alpha^2}{r^2-\alpha^2}},$$

d'où

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r^2+\lambda^2\alpha^2}{r^2-\alpha^2}},$$

ce qui est l'équation de la tautochrone.

Nous avons supposé, dans la discussion précédente, α différent de zéro; s'il était nul, on aurait

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{4T^2m}{\pi^2} - 1}.$$

Si $\frac{4T^2m}{\pi^2}$ est moindre que 1, cette équation ne représente rien; si $\frac{4T^2m}{\pi^2} = 1$, elle appartient à une droite passant par le centre fixe; enfin si $\frac{4T^2m}{\pi^2}$ surpasse l'unité, elle représente une spirale logarithmique. Ainsi, lorsqu'un mobile assujetti à se mouvoir sur une spirale logarithmique est attiré par l'origine de cette courbe proportionnellement à la distance, il y arrive toujours dans le même temps, quel que soit son point de départ.

7. On pourrait faire sur la loi de la force plusieurs autres hypothèses

et obtenir des courbes plus ou moins faciles à discuter; je me borne à supposer encore

$$f(r) = m(r - a),$$

cas auquel s'applique la remarque qui termine le n° 4. On aura alors

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{4T^2 m}{\pi^2} - 1},$$

équation qui représente une spirale logarithmique, lorsque $\sqrt{\frac{4T^2 m}{\pi^2} - 1}$ est une quantité réelle. Ainsi, lorsqu'un point assujetti à rester sur une spirale logarithmique est sollicité par une force dirigée vers l'origine et proportionnelle à l'excès de son rayon vecteur sur celui d'un point fixe de la courbe, il arrive dans le même temps à ce point fixe, quel que soit son point de départ.

8. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le mouvement dans le vide; admettons maintenant que le mobile éprouve de la part du milieu environnant une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse. Soit k cette résistance pour une vitesse égale à l'unité : en conservant les notations du n° 2, nous aurons, dans le cas d'une pesanteur constante en grandeur et en direction,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} + k\frac{ds}{dt^2},$$

ou bien

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ds = -2g\,dx.$$

Cette équation s'intègre à la manière des équations linéaires; remarquons d'ailleurs que la vitesse doit être nulle pour $x = h$, et nous trouverons

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2ge^{2ks}\int_x^h e^{-2ks}\,dx, \quad dt = -\frac{e^{-ks}\,ds}{\sqrt{2g\int_x^h e^{-2ks}\,dx}}.$$

Faisons

$$\int_0^h e^{-2ks}\,dx = l, \quad \int_0^x e^{-2ks}\,dx = u, \quad e^{-ks} = \psi(u);$$

il viendra

$$dt = \frac{\psi'(u)\,du}{k\sqrt{2g(l-u)}}, \quad \mathrm{T} = -\frac{1}{k\sqrt{2g}}\int_0^l \frac{\psi'(u)\,du}{\sqrt{l-u}}.$$

Cette valeur de T est pareille à celles qu'on a obtenues aux n^{os} **2** et **3**; elle doit être indépendante de h et par suite de l; on en conclura donc de la même manière

$$\psi'(u) = -\sqrt{\frac{c}{u}},$$

et, en intégrant,

$$\psi(u) = 1 - 2\sqrt{cu}.$$

On a déterminé la constante en considérant que $\psi(u)$ ou e^{-ks} doit se réduire à l'unité pour $s = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$, ou, ce qui revient au même, pour $u = 0$.

Dans la valeur de T remplaçons $\psi'(u)$ par $-\sqrt{\frac{c}{u}}$; elle devient

$$\mathrm{T} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{2g}}\int_0^l \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{c}{2g}},$$

d'où

$$\sqrt{c} = \frac{k\mathrm{T}\sqrt{2g}}{\pi}.$$

Substituons cette valeur de $\sqrt{c}$, ainsi que celles de u et de $\psi(u)$, dans l'équation

$$\psi(u) = 1 - 2\sqrt{cu};$$

nous trouverons

$$e^{-ks} = 1 - \frac{2k\mathrm{T}}{\pi}\sqrt{2g}\int_0^x e^{-2ks}\,dx,$$

ou, en transposant et élevant au carré,

$$\frac{8k^2g\mathrm{T}^2}{\pi^2}\int_0^x e^{-2ks}\,dx = (1 - e^{-ks})^2.$$

Différentions, multiplions les deux membres par e^{2ks}, puis intégrons.

et il nous viendra, pour l'équation de la tautochrone,

$$\frac{4k^2gT^2}{\pi^2}x = e^{ks} - ks - 1, \quad x = \frac{\pi^2}{4k^2gT^2}(e^{ks} - ks - 1).$$

En faisant $k = 0$, elle devient

$$x = \frac{\pi^2}{8gT^2}s^2;$$

on retrouve la cycloïde, comme cela devait arriver. Quelle que soit d'ailleurs la valeur de k, il est aisé de reconnaître que la tautochrone est tangente à la cycloïde à son sommet, et que le contact est du second ordre.

9. La résistance étant toujours proportionnelle au carré de la vitesse, supposons enfin que le mobile soit attiré ou repoussé par un centre fixe; nous aurons, en reprenant les notations du n° 3,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -f(r)\frac{dr}{ds} + k\frac{ds^2}{dt^2},$$

ou

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ds = -2f(r)\,dr.$$

Intégrons cette équation de manière que $\frac{ds}{dt}$ s'évanouisse pour $r = a$, et nous trouverons

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2e^{2ks}\int_r^a e^{-2ks}f(r)\,dr.$$

Posons

$$\int_\alpha f(r)\,dr = x,$$

d'où

$$f(r)\,dr = dx;$$

faisons de plus

$$\int_\alpha^a f(r)\,dr = h,$$

il viendra

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2e^{2ks}\int_x^h e^{-2ks}\,dx.$$

Sauf le facteur constant g, cette valeur de $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ est identique à celle du numéro précédent; la valeur de T qui s'en déduit doit être indépendante de a et par conséquent de h; en outre, comme dans ce numéro, x se réduit à zéro en même temps que s. Répétant donc les raisonnements et les calculs déjà faits, on arrivera à la même équation, où g sera remplacé par l'unité; et, en y remettant à la place de α sa valeur, on aura, pour équation de la tautochrone,

$$\int_\alpha^r f(r)\,dr = \frac{\pi^2}{4k^2T^2}\left(e^{ks} - ks - 1\right).$$

En faisant $k = 0$, on retrouve la courbe que nous avons déterminée dans le cas du vide; on reconnaîtra facilement qu'en général ces deux courbes sont tangentes à l'extrémité du rayon vecteur α qui est leur sommet commun, et qu'elles y ont un contact du second ordre.

SUR LES INTÉGRALES AUX DIFFÉRENCES FINIES;

PAR M. ROBERT LESLIE ELLIS (DE CAMBRIDGE).

On peut évaluer l'intégrale

$$(1)\qquad \int dx \int dy \ldots \int dz\, \varphi(x, y, \ldots, z),$$

dans laquelle les variables $x, y, \ldots, z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$(2)\qquad \psi(x, y, \ldots, z) < h,$$

en remplaçant dans la formule (1) la fonction φ par une fonction discontinue, qui devient égale à zéro pour toutes les valeurs des variables non comprises dans la formule (2). On peut alors étendre les intégrations depuis zéro jusqu'à l'infini, ce qui simplifie beaucoup les calculs.

Je crois que c'est à M. Lejeune-Dirichlet qu'est due l'idée de cette manière d'évaluer les intégrales multiples; c'est ainsi qu'il a obtenu, il y a quelques années, une généralisation très-remarquable d'un théorème dû à Euler.

La théorie des intégrales définies nous fournit plusieurs moyens d'exprimer les fonctions discontinues; je me suis servi, pour cet objet, du théorème de Fourier. Au moyen de ce théorème, j'ai déterminé, dans un petit Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* de Cambridge, les valeurs de deux intégrales multiples. La première de ces intégrales revient à la généralisation qu'a donnée M. Liouville du résultat de M. Dirichlet; mais je crois que la seconde est nouvelle.

La facilité avec laquelle j'avais obtenu ces résultats me fit penser qu'on pourrait peut-être appliquer une méthode semblable aux différences finies; les résultats auxquels je suis parvenu par cette considération font le sujet de ce qui va suivre.

En suivant l'analogie qui existe entre les différences finies et les dif-

férences infiniment petites, on voit qu'à l'intégration multiple, il faut substituer des sommations par rapport à toutes les variables qui entrent dans la fonction donnée.

Soit $\varphi(x, y)$ cette fonction. Je désigne par $\sum_a^b \sum_c^d \varphi(x, y)$ la quantité suivante ($b - a$ et $d - c$ étant des nombres entiers et positifs),

$$\begin{aligned} &\varphi(a, c) + \varphi(a + 1, c) + \ldots \varphi(b, c) \\ &+ \varphi(a, c + 1) + \ldots\ldots\ldots \varphi(b, c + 1) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \varphi(a, d) + \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi(b, d). \end{aligned}$$

Il est visible que cette notation pourrait s'étendre à un nombre quelconque de variables.

Le théorème de Fourier se remplacera par la formule suivante, dans laquelle $b - x$ et $x - a$ sont des nombres entiers et positifs,

$$(3) \qquad fx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sum_a^b fu \cos \alpha (x - u).$$

On peut donc poser

$$x = a, \ = a + 1, \ldots \ = b;$$

mais si l'on donne à x (qui doit toujours être un nombre entier) une valeur quelconque non comprise dans ces limites, on aura

$$\int_0^\pi d\alpha \sum_a^b fu \cos \alpha (x - u) = 0.$$

La démonstration de ce théorème est si facile, qu'il n'est pas nécessaire de s'y arrêter; je ferai seulement observer en passant qu'elle suppose que la fonction fu ne devienne infinie pour aucune des valeurs

$$u = a, \quad a + 1, \ldots, \quad b.$$

Désignons par $\{x\}^p$ la fonction $\frac{\Gamma(x+p)}{\Gamma(x)}$: toutes les fois que p est un nombre entier et positif, nous aurons

$$\{x\}^p = x.x + 1 \ldots x + p - 1.$$

Cela posé, entrons en matière.

Je vais chercher la valeur de la somme multiple

$$(4)\qquad \sum_0 \sum_0 \ldots \sum_0 \{x\}^{p-1} \{y\}^{q-1} \ldots \{z\}^{r-1} f(x+y+\ldots+z),$$

dans laquelle l'étendue de la sommation est donnée par l'inégalité

$$(5)\qquad x+y+\ldots+z \overset{=}{<} h.$$

D'après l'idée fondamentale de notre analyse, je remplace dans la formule (4) la fonction $f(x+y+\ldots+z)$ par

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\alpha \sum_k^h fu \cos\alpha(x+y+\ldots+z-u).$$

Donc nous aurons, en changeant l'ordre des sommations,

$$(6)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_k^h fu \int_0^\pi d\alpha \sum_0 \sum_0 \ldots \sum_0 \{x\}^{p-1} \{y\}^{q-1} \ldots \{z\}^{r-1} \cos\alpha(x+y+\ldots+z-u)$$

(k est un nombre négatif quelconque).

Les sommations par rapport à x, y, etc., peuvent à présent s'étendre jusqu'à l'infini.

Nous allons déterminer les valeurs de

$$\sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \cos\alpha x, \quad \text{et de} \quad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \sin\alpha x.$$

Soit $z = e^{\alpha\sqrt{-1}}$; nous aurons, par un théorème connu,

$$2\sum_0^\infty a^{-x} \cos\alpha x = \frac{1}{1-\frac{z}{a}} + \frac{1}{1-\frac{1}{az}},$$

puisqu'on a

$$1+\frac{z}{a}+\text{etc.} = \frac{1}{1-\frac{z}{a}}, \quad \text{et} \quad 1+\frac{1}{za}+\text{etc.} = \frac{1}{1-\frac{1}{za}}.$$

Pareillement on a

$$1+\frac{p}{1}\frac{z}{a}+\frac{p.p+1}{1.2}\frac{z^2}{a^2}+\text{etc.} = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{a}\right)^p}.$$

et de là

$$(7)\qquad \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)}a^{-p}z + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)}a^{-(p+1)}z^2 + \text{etc.} = \Gamma(p)\frac{z}{(a-z)^p}.$$

En écrivant dans cette équation z^{-1} au lieu de z, elle deviendra

$$\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)}a^{-p}z^{-1} + \text{etc.} = \Gamma(p)\frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^p}.$$

Ajoutant cette équation à la dernière, nous aurons, à cause de $\{x\}^p = \frac{\Gamma(x+p)}{\Gamma(x)}$,

$$(8)\qquad 2\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}a^{-(x+p-1)}\cos\alpha x = \Gamma(p)\left\{\frac{z}{(a-z)^p} + \frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^p}\right\}$$

(On doit remarquer que $\{0\}^p = 0$, puisque $\Gamma(0)$ a une valeur infinie.)

Ensuite, à cause de

$$(a-z)(a-z^{-1}) = 1 - 2a\cos\alpha + a^2,$$

nous aurons

$$\frac{z}{(a-z)^p} + \frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^p} = \frac{1}{(1-2a\cos\alpha+a^2)^p}\left(z(a-z^{-1})^p + z^{-1}(a-z)^p\right).$$

Mais, puisque $z = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$,

$$a - z = \sin\alpha\left(a\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotang}\alpha - \sqrt{-1}\right).$$

Posons donc

$$\operatorname{cotang}\varphi = a\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotang}\alpha,$$

la valeur de $(a-z)^p$ deviendra

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^p(\cos p\varphi - \sqrt{-1}\sin p\varphi),$$

tandis que celle de $(a-z^{-1})^p$ sera

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^p(\cos p\varphi + \sqrt{-1}\sin p\varphi);$$

par conséquent

$$z(a - z^{-1})^p + z^{-1}(a - z)^p = 2\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^p \cos(p\varphi + \alpha).$$

Mais la valeur de $\sin\varphi$ est égale à $\frac{\sin\alpha}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^{\frac{1}{2}}}$. Donc, nous aurons finalement

$$(9) \qquad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} a^{-(x+p-1)} \cos\alpha x = \Gamma(p) \frac{\cos(p\varphi + \alpha)}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

On trouvera de la même manière que

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} a^{-(x+p-1)} \sin\alpha x = \Gamma(p) \frac{\sin(p\varphi + \alpha)}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^{\frac{p}{2}}}. \\ (a > 1). \end{array} \right.$$

A présent faisons $a = 1$. Alors nous aurons

$$\operatorname{cotang}\varphi = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

et les équations (9) et (10) deviendront

$$(11) \qquad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \cos\alpha x = \Gamma(p) \frac{\cos\left(\frac{p}{2}(\pi - \alpha) + \alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^p}.$$

$$(12) \qquad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \sin\alpha x = \Gamma(p) \frac{\sin\left(\frac{p}{2}(\pi - \alpha) - \alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^p}.$$

Au moyen de ces équations, on prouvera facilement que

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \ldots \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \{y\}^{q-1} \ldots \{z\}^{r-1} \cos\alpha(x + y + \ldots + z - u) \\ = \Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r) \frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi - \alpha) + n\alpha - \alpha u\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots}}. \end{array} \right.$$

n étant le nombre des variables $x, y, \ldots, z$.

Mais en écrivant, dans l'équation (11), $p+q+\ldots r$ au lieu de p, on aura

$$\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1} \cos\alpha x = \Gamma(p+q+\ldots r) \frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)+\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}},$$

et pareillement

$$\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1} \sin\alpha x = \Gamma(p+q+\ldots r) \frac{\sin\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)+\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}}.$$

En combinant ces deux équations, on trouvera que

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1} \cos\alpha(x-\nu) \\ &= \Gamma(p+q+\ldots r) \frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)+\alpha-\alpha\nu\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}}. \end{aligned}\right.$$

Mettons donc

$$\nu = u - n + 1,$$

et comparons les équations (13) et (14), nous aurons

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty\sum_0^\infty\ldots\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1} \cos\alpha(x+y+\ldots z-u) \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q\ldots+r)} \sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1} \cos\alpha(x-(u-n+1)). \end{aligned}\right.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $d\alpha$ et en intégrant depuis zéro jusqu'à π, nous aurons, par la formule (3),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi d\alpha \sum_0^\infty\sum_0^\infty\ldots\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1} \cos\alpha(x+y+\ldots z-u) \\ &= \pi\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots+r)}\{u-n+1\}^{p+q+\ldots r-1}, \end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs positives de $u-n+1$.

Pour toutes les valeurs négatives de cette quantité, le second membre de l'équation (16) est égal à zéro.

Donc, en effectuant la sommation par rapport à u, il est inutile de donner à u des valeurs moindres que $n-1$. Cela posé, nous aurons finalement, en considérant la formule (4),

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0\sum_0\ldots\sum_0 \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1} f(x+y+\ldots+z) \\ &\quad = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots r)}\sum_{n-1}^{h} fu\{u-n+1\}^{p+q+\ldots r-1}, \end{aligned}\right.$$

l'étendue des sommations étant déterminée par l'inégalité

$$x+y+\ldots+z \overset{=}{<} h.$$

Ce théorème est l'analogue pour les différences finies du théorème de M. Liouville, dont j'ai déjà parlé.

En effet, en supposant que l'inégalité qui détermine les limites des variables soit, comme ci-dessus,

$$x+y+\ldots+z \overset{=}{<} h,$$

voici le théorème de M. Liouville :

$$\int_0 dx\int_0 dy\ldots\int_0 dz\, x^{p-1}y^{q-1}\ldots z^{r-1} f(x+y+\ldots+z)$$
$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots r)}\int_0^h fu\, u^{p+q+\ldots r-1}\, du.$$

Il est vrai que cette équation n'est qu'un cas particulier du résultat qu'a donné M. Liouville, mais malheureusement nous ne pouvons pas généraliser la formule (17) en supposant que l'étendue des sommations soit donnée par l'inégalité

$$ax+by+\ldots+cz \overset{=}{<} h,$$

sans au moins lui donner une forme beaucoup plus compliquée.

A présent, désignons, suivant la notation usitée, par $[x]^p$ la fonction $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-p+1)}$ (nous aurons, quand p sera un nombre entier,

$$[x]^p = x(x-1)\ldots(x-p+1),$$

et tâchons d'évaluer la somme suivante,

$$\sum_{p-1}\sum_{q-1}\cdots\sum_{r-1}[x]^{p-1}[y]^{q-1}\cdots[z]^{r-1}f(x+y+\ldots z),$$

dans laquelle x peut prendre toutes les valeurs $p-1$, p, $p+1$, etc., tandis que y peut prendre toutes les valeurs $q-1$, q, $q+1$, etc., et ainsi de suite pour les autres variables. L'étendue des sommations est déterminée par l'inégalité

$$x+y+\ldots+z \overset{=}{<} h,$$

dans laquelle h est égale à $p+q+\ldots r+$ un nombre entier.

Nous allons premièrement trouver les valeurs de

$$\sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\cos\alpha x, \quad \text{et de} \quad \sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\sin\alpha x.$$

Puisque nous avons

$$1+\frac{p}{1}az+\frac{p.p+1}{1.2}a^2z^2+\text{etc.}=\frac{1}{(1-az)^p},$$

il s'ensuit que

$$\frac{\Gamma(p-1+1)}{\Gamma(1)}z^{p-1}+\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)}az^p+\text{etc.}=\Gamma(p)\frac{z^{p-1}}{(1-az)^p}.$$

Remplaçons z par z^{-1}, nous aurons, en ajoutant les deux résultats et en posant $a=1$,

$$[p-1]^{p-1}\cos\alpha(p-1)+[p]^{p-1}\cos\alpha p+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}+\frac{z^{-p+1}}{(1-z^{-1})^p}\right),$$

c'est-à-dire nous aurons

$$\sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\cos\alpha x=\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}+\frac{z^{-p+1}}{(1-z^{-1})^p}\right),$$

et pareillement

$$\sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\sin\alpha x=\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}-\frac{z^{-p+1}}{(1-z^{-1})^p}\right).$$

Il est facile de voir, en suivant à peu près la même route qu'aupara-

vant, que ces deux équations reviennent à celles-ci :

$$(18)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} [x]^{p-1} \cos \alpha x = \Gamma(p) \frac{\cos\left(\frac{p}{2}(\pi - \alpha) - \alpha\right)}{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^p},$$

$$(19)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} [x]^{p-1} \sin \alpha x = \Gamma(p) \frac{\sin\left(\frac{p}{2}(\pi - \alpha) - \alpha\right)}{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^p}.$$

Cela posé, on peut facilement s'assurer que la somme dont nous cherchons la valeur est égale à

$$\frac{1}{\pi} \sum^{h} fu \int_0^{\pi} d\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \ldots \sum_{r=1}^{\infty} [x]^{p-1} [y]^{q-1} \ldots [z]^{r-1} \cos \alpha (x + y \ldots z - u).$$

Par conséquent elle est égale, en vertu des formules (18) et (19), à

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\pi} \sum^{h} fu \int_0^{\pi} d\alpha \frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi - \alpha) - n\alpha - \alpha u\right)}{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}},$$

et de là nous aurons finalement

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{p=1} \sum_{q=1} \ldots \sum_{r=1} [x]^{p-1} [y]^{q-1} \ldots [z]^{r-1} f(x + y + \ldots z) \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots r)} \sum^{h}_{p+q+\ldots r-1} fu\, [u + n - 1]^{p+q+\ldots r-1}. \end{aligned} \right.$$

Les deux résultats (17) et (20) suffisent pour montrer l'esprit de notre analyse, mais je vais encore l'appliquer à un autre exemple.

Evaluons l'expression

$$(21)\qquad \sum_0 \sum_0 \ldots \sum_0 a^x b^y \ldots c^z f(mx + ny + \ldots pz),$$

$mx + ny + \ldots pz \overset{=}{<} h$ étant l'inégalité qui détermine l'étendue des sommations.

Je suppose que $m, n, \ldots, p$ soient des nombres entiers. En faisant

$$mx = x', \quad ny = y', \text{ etc.}; \quad a^{\frac{1}{2n}} = a', \quad b^{\frac{1}{n}} = b', \text{ etc.}.$$

la formule (21) deviendra

$$\sum_0 \sum_0 \cdots \sum_0 a'^{x'} b'^{y'} \ldots c'^{z'} f(x' + y' + \ldots z') .$$

Nous pouvons donc admettre que $m, n, \ldots, p$ soient égales à l'unité; le résultat général se déduira facilement de ce cas particulier.

Nous aurons d'abord

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_0 \sum_0 \cdots \sum_0 a^x b^y \ldots c^z f(x + y + \ldots z \\ & = \frac{1}{\pi} \sum^h fu \int_0^\pi d\alpha \sum_0^\infty \sum_0^\infty \ldots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos\alpha(x + y + \ldots z - u) . \end{aligned} \right.$$

A présent, puisque

$$\sum_0^\infty a^x \cos \alpha x = \frac{1 - a\cos\alpha}{1 - 2a\cos\alpha - a^2},$$

$$\sum_0^\infty a^x \sin \alpha y = \frac{a \sin\alpha}{1 - 2a\cos\alpha + a^2},$$

nous pouvons effectuer les sommations indiquées dans le second membre de l'équation (22).

En effet, on verra, avec un peu d'attention, que nous aurons

$$(23) \quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty \ldots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos\alpha(x + y + \ldots z - u) = \frac{N}{D}.$$

D étant égal à

$$(1 - 2a\cos\alpha + a^2) \ldots (1 - 2c\cos\alpha + c^2) ,$$

tandis que N est égal à

$$\cos\alpha u - Sa.\cos\alpha(u+1) + Sab.\cos\alpha(u+2) - \ldots \pm ab\ldots c\cos\alpha(u+\nu) ,$$

le signe de sommation S ayant rapport aux ν quantités $a, b, \ldots, c$.

Afin de donner à $\frac{1}{D}$ une forme plus commode, posons l'équation

$$\frac{1}{D} = \frac{A}{1 - 2a\cos\alpha + a^2} + \ldots + \frac{C}{1 - 2c\cos\alpha + c^2};$$

donc nous aurons

$$A = \frac{a^{v-1}}{(a-b)\ldots(a-c)} \cdot \frac{1}{(1-ab)\ldots(1-ac)},$$

et ainsi de suite pour B,..., C.

Or, nous savons que

$$\frac{1}{1-2a\cos\alpha+a^2} = \frac{1}{1-a^2}(1+2a\cos\alpha+\text{etc.}),$$

et de là il est visible que le terme de $\frac{NA}{1-2a\cos\alpha+a^2}$, qui ne renferme pas α, est égal à

$$\frac{a^{v-1}}{(a-b)\ldots(a-c)}\,\frac{1}{(1-a^2)(1-ab)\ldots(1-ac)}\,a^u - a^{u+1}Sa + a^{u+2}Sab - \text{etc.}),$$

ou à

$$\frac{a^{u+v-1}}{(a-b)\ldots(a-c)},$$

puisque

$$\frac{1-aSa+a^2Sab-\text{etc.}}{(1-a^2)(1-ab)\ldots(1-ac)} = 1.$$

Nous voyons donc que, pour toutes les valeurs positives de u et pour $u=0$,

$$24 \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\alpha \sum_0^\infty \sum_0^\infty \ldots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos\alpha(x+y+\ldots z-u) \\ &\qquad = \frac{a^{u+v-1}}{(a-b)\ldots(a-c)} + \frac{b^{u+v-1}}{(b-a)\ldots(b-c)} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Si u est négatif, faisons $u=-u'$, nous aurons

$$N = \cos\alpha u' - Sa.\cos\alpha(u'-1) + \text{etc.} \pm ab\ldots c\cos\alpha(u'-v),$$

et le terme de $\frac{NA}{1-2a\cos\alpha+a^2}$, qui ne renfermera pas α, sera égal à

$$\frac{a^{u'+v-1}}{(a-b)\ldots(a-c)}\,\frac{1-a^{-1}Sa+a^{-2}Sab-\text{etc.}}{(1-a^2)(1-ab)\ldots(1-ac)}.$$

En supposant que u' ne soit pas moindre que v, il est visible que

$$1-a^{-1}Sa+a^{-2}Sab-\text{etc.} = 0.$$

Si u' est moindre que v, alors la formule précédente n'est pas égale à zéro, mais l'ensemble des termes semblables tels que

$$\frac{b^{u+v-1}}{(b-a)\ldots(b-c)}\,\frac{1-b^{-1}Sa+\text{etc.}}{(1-b^2)(1-ba)\ldots(1-bc)}$$

disparaîtra; c'est ce que nous allons démontrer.

Désignons par $S_{u'}$ l'ensemble de toutes les combinaisons qu'on peut faire u' des v quantités $a, b, \ldots, c$. Si u' est moindre que v, le terme de $\frac{NA}{1-2a\cos\alpha+a^2}$, qui ne renfermera pas α, sera égal à

$$(25)\qquad \frac{A}{1-a^2}(a^{u'}-a^{u'-1}S_1+\ldots\pm S_{u'}\mp aS_{u'+1}\pm\ldots\pm a^{v-u'}S_v);$$

or

$$a^{u'}-a^{u'-1}S_1+\ldots\pm S_{u'}\mp a^{-1}S_{u'+1}\pm\ldots\pm a^{-v+u'}S_v=0.$$

Il suit de là que la formule (25) est égale à

$$\mp\frac{A}{1-a^2}(S_{u'+1}(a-a^{-1})-S_{u'+2}(a^2-a^{-2})+\ldots\pm S_v(a^{v-u'}-a^{-v+u'})),$$

et, en ajoutant toutes les formules semblables, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\mp S_{u'+1}\left(\frac{A}{1-a^2}(a-a^{-1})+\frac{B}{1-b^2}(b-b^{-1})+\ldots\right),\\
&\pm S_{u'+2}\left(\frac{A}{1-a^2}(a^2-a^{-2})+\frac{B}{1-b^2}(b^2-b^{-2})+\ldots\right),\\
&\mp \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pm S_v\left(\frac{A}{1-a^2}(a^{v-u'}-a^{-v+u})+\frac{B}{1-b^2}(b^{v-u'}-b^{-v+u})+\ldots\right).
\end{aligned}$$

Or, je dis que chacune de ces quantités est séparément égale à zéro. En remplaçant $2\cos\alpha$ par $z+z^{-1}$, nous aurons

$$\frac{z^v}{(1-az)\ldots(1-cz)(z-a)\ldots(z-c)}=\frac{Az}{1-a^2}\left(\frac{a}{1-az}-\frac{a^{-1}}{1-a^{-1}z}\right)+\text{etc.}$$

Si nous développons les deux membres de cette équation selon les puissances positives de z, la puissance la moins élevée qui se trouvera dans le premier membre sera z^v. Par conséquent, nous voyons que

$$\frac{A}{1-a^2}(a^p-a^{-p})+\frac{B}{1-b^2}(b^p-b^{-p})+\text{etc.}=0,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de p qui sont moindres que v, ce qu'il fallait démontrer.

Donc, finalement, pour toutes les valeurs négatives de u,

$$(26)\qquad \int_0^\pi \sum_0^\infty \sum_0^\infty \ldots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos\alpha(x+y+\ldots z-u) = 0.$$

A présent, il est facile de voir que

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_0 \sum_0 \ldots \sum_0 a^x b^y \ldots c^z f(x+y+\ldots z) \\ &= \sum_0^h fu \left(\frac{a^{u+v-1}}{(a-b)\ldots(a-c)} + \ldots + \frac{c^{u+v-1}}{(c-a)\ldots(c-b)}\right), \end{aligned}\right.$$

ce qui est le résultat que nous cherchions.

J'ai démontré, dans le *Journal de Mathématiques* de Cambridge, une équation que je vais reproduire ici, afin qu'on puisse la comparer avec l'équation dernière. Les limites étant déterminées par l'inégalité

$$x+y+\ldots z \leqq h,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_0 dx \int_0 dy \ldots \int_0 dz\, e^{-az-by-\ldots cz} f(x+y+\ldots z) \\ &= \int_0^h fu\, du \left(\frac{e^{-au}}{(b-a)\ldots(c-a)} + \ldots + \frac{e^{-cu}}{(a-c)(b-c)\ldots}\right). \end{aligned}$$

Les résultats que nous avons obtenus sont, ce me semble, d'un genre nouveau : c'est pourquoi je pense qu'ils pourront peut-être intéresser les géomètres.

SUR LES RAYONS DE COURBURE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans le tome VI de ce Journal (page 403), j'ai démontré un théorème de géométrie plane dont voici l'énoncé : « Si par les points d'in-
» tersection d'un cercle donné et d'une courbe géométrique on mène
» des normales à la courbe et qu'on les prolonge jusqu'à leur ren-
» contre avec une transversale quelconque passant par le centre du
» cercle, la somme des valeurs inverses des segments compris entre
» ce centre et les pieds des normales sera égale à zéro. » Admettons maintenant que le cercle dont il s'agit soit tangent à la courbe en un point M, et prenons pour transversale la droite MO qui passe par le point M et par le centre O et qui est ainsi perpendiculaire à la courbe. Le cercle doit être considéré comme ayant en M avec la courbe deux points communs infiniment voisins, et les segments qui répondent aux normales menées par ces points ont tous deux pour valeur la distance OC du point O au centre de courbure C relatif au point M. Le théorème précédent fournira donc entre OC et les segments relatifs à tous les autres points de rencontre du cercle avec la courbe géométrique une relation très-simple qui fera connaître cette quantité, et, par suite, le rayon de courbure MC. Pour que cette remarque puisse donner lieu à une construction géométrique actuelle, il faut, bien entendu, que tous les points d'intersection de la courbe et du cercle soient réels, en sorte que le degré de cette courbe étant m, il y ait, outre le point de contact M, d'autres points de rencontre en nombre $(2m-2)$. Cela étant, soient menées les normales à la courbe en ces $(2m-2)$ points, et soient P,..., Q les pieds des normales qui se trouvent sur la droite OC du même côté que C, tandis que les pieds $p,\ldots,q$ des autres normales seront du côté opposé. On aura

$$\frac{2}{\mathrm{OC}} = \frac{1}{\mathrm{O}p} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{O}q} - \frac{1}{\mathrm{OP}} - \ldots - \frac{1}{\mathrm{OQ}}.$$

Telle est la formule qui fera connaître OC.

NOTE

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$;

PAR M. J.-A. SERRET.

La valeur de cette intégrale, donnée par M. Bertrand dans le précédent volume de ce Journal, peut être obtenue immédiatement et sans effectuer aucune intégration.

Si, en effet, on pose

$$x = \operatorname{tang}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{1+x^2} = d\varphi,$$

elle se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l(1+\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\,\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{8}\,l2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\varphi\,d\varphi,$$

et comme les deux intégrales du second membre se détruisent, on aura finalement

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2.$$

C. Q. F. D.

FIN DU NEUVIÈME VOLUME.

Fig. 1.

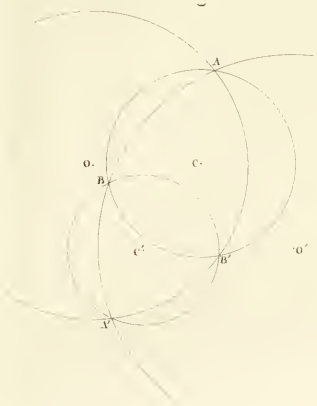


Fig. 2.

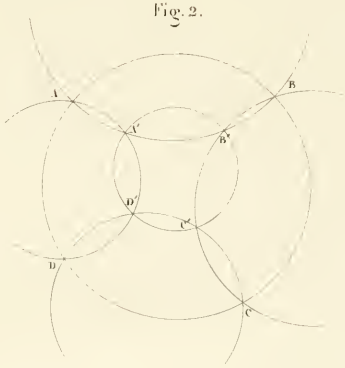


Fig. 3.

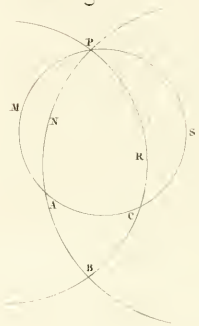


Fig. 5

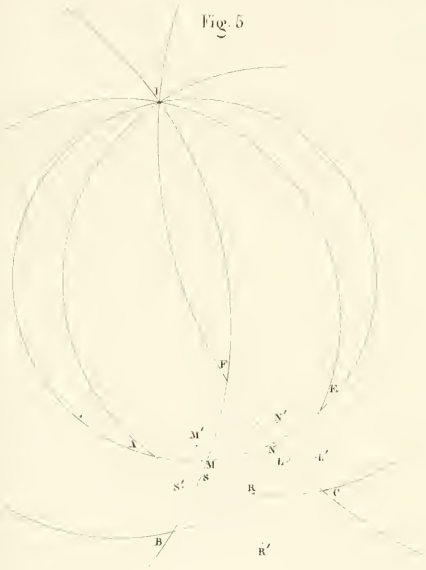
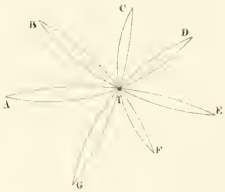


Fig. 4.



Gravé par E. Wernsser

Mémoire sur la poussée que des terres nouvellement remuées exercent contre le parement d'un mur d'appui, par M. P. S. Saint-Guilhem

Fig. 1.

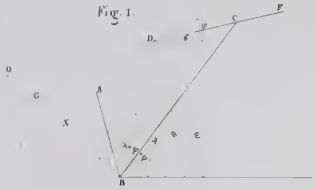


Fig. 2.

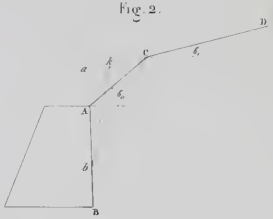


Fig. 3.

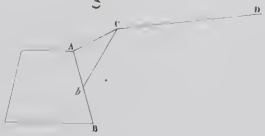


Fig. 4

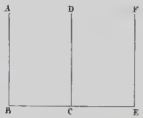


Fig. 5.

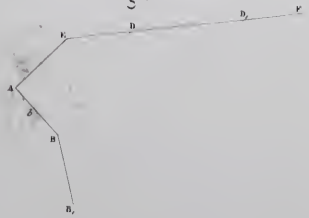
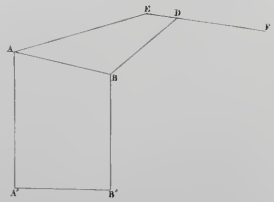


Fig. 6.



Mémoire de Géométrie, par M. Miquel, Auguste

Fig. 1.

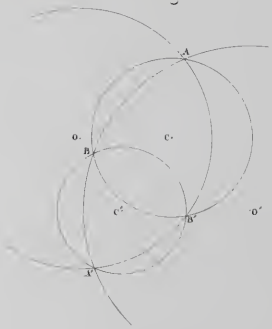


Fig. 2.

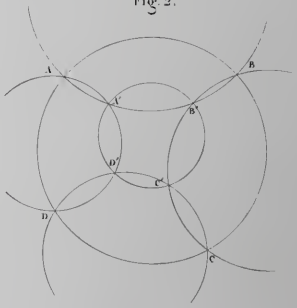


Fig. 5.

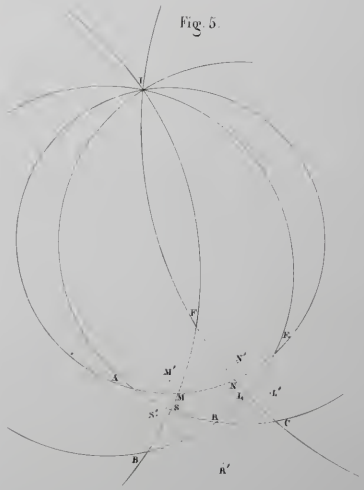


Fig. 3.

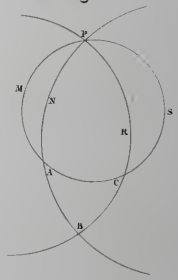
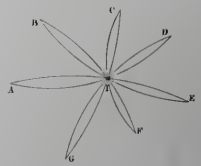


Fig. 4.



Gravé par V. Beauvais

...nes d'une équation numérique, située entre des limites données, par M. R. Lobatto.

Fig. 3.

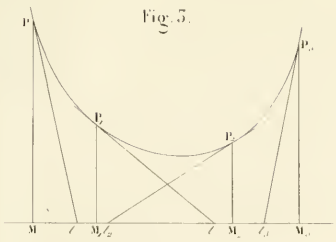


Fig. 4.

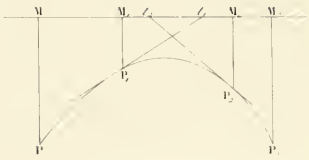


Fig. 7.

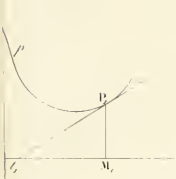


Fig. 8.

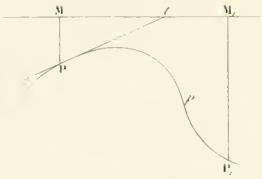


Fig. 9.

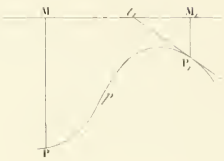
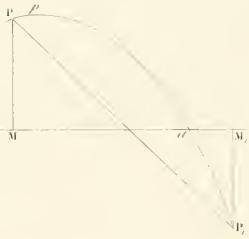


Fig. 12.

Fig. 13.



Note sur quelques nouveaux Caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, située entre des limites données, par M. R. Lobatto.

Fig. 1.

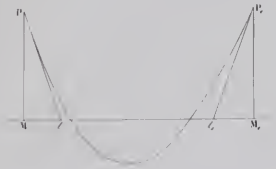


Fig. 2.

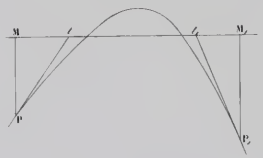


Fig. 3.

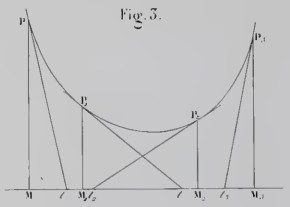


Fig. 4.

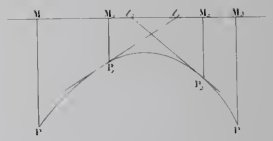


Fig. 5.

Fig. 6.

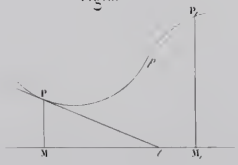


Fig. 7.

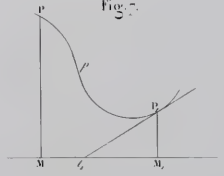


Fig. 8.

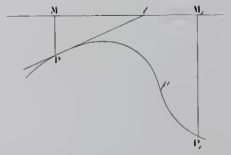


Fig. 9.

Fig. 10.

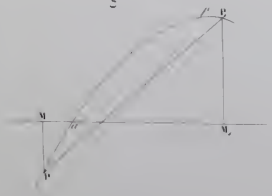


Fig. 11.

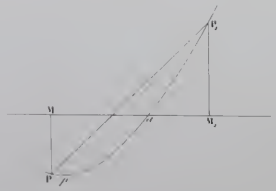
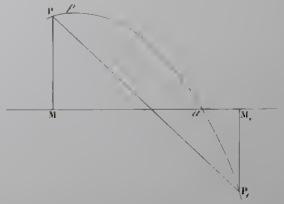


Fig. 12.

Fig. 13.



Gravé par L. Thermier.

QA
1
J684
t.9
Physical &
Applied Sci.
Serials
Ma

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY